SERIE NUMERICHE

FAUSTO FERRARI

Materiale propedeutico alle lezioni di Complementi di Analisi Matematica ed Elementi di Calcolo delle probabilità per il corso di Laurea in Ingegneria per la parte di Elementi di Calcolo delle probabilità Civile dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2011/2012

1. Prerequisiti

Teoremi di esistenza del limite per successioni monotone. Campo dei numeri complessi. Formula di Taylor con resto di Peano.

2. Serie numeriche

Ricordiamo che in $\mathbb{C}$ è definito il modulo di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ come

$$\mid z \mid = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2},$$

dove $\Re z$ indica la parte reale di z e $\Im z$ indica la parte immaginaria di z.

Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$,

(i) $\mid z \mid \geq 0$, e $\mid z \mid = 0$ se e solo se $z = 0$;
(ii) $\mid zw \mid = \mid z \mid\mid w \mid$;
(iii) $\mid z + w \mid = \mid z \mid + \mid w \mid$, (disuguaglianza triangolare).

Si può definire la distanza tra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ come:

$$d(z, w) = \mid z - w \mid .$$

Pertanto possiamo dare la definizione di successione convergente in $\mathbb{C}$ nel modo seguente:

Definizione 2.1. *Sia $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una successione. Sia $w \in \mathbb{C}$. Diremo che la successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a w in $\mathbb{C}$ se*

$$\textit{per ogni } \epsilon > 0, \ \textit{ esiste } k(\epsilon) \in \mathbb{N} : \mid z_n - w \mid < \epsilon, \ \textit{ per ogni } n \in \mathbb{N}, n > k(\epsilon).$$

In tal caso diremo che la successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, esiste il limite di $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per n che tende $+\infty$ uguale a w e scriveremo brevemente

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = w.$$

Possiamo inoltre definire una successione divergente in $\mathbb{C}$ come segue.

Definizione 2.2. *Sia $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una successione. Diremo che la successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge in $\mathbb{C}$ se*

$$\textit{per ogni } M > 0, \ \textit{ esiste } k(M) \in \mathbb{N} : \mid z_n \mid > M, \ \textit{ per ogni } n \in \mathbb{N}, n > k(M).$$

In tal caso diremo che la successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente per n che tende $+\infty$ e scriveremo brevemente

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty.$$

Definizione 2.3. *Sia $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una successione. Diremo che la successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare in $\mathbb{C}$ se non è né convergente in $\mathbb{C}$, né divergente in $\mathbb{C}$.*

Date: 26/01/2004.

3. La serie geometrica

Sia z un numero complesso. Definiamo la seguente successione $(z^n)_{n\in N}$. Supponiamo che $z \neq 0$. Costruiamo ora una nuova successione a partire dalle somme parziali nel modo seguente $S_0 = z^0 = 1$, $S_1 = z^0 + z$, $S_2 = z^0 + z + z^2$,...$S_{n+1} = S_n + z^{n+1}$. D'altra parte

$$zS_n = z(z^0 + z + \cdots + z^n) = (z + z^2 + \cdots + z^{n+1}) = S_{n+1} - 1.$$

Se consideriamo il seguente sistema nelle incognite S_n e S_{n+1}

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + z^{n+1} \\ zS_n = S_{n+1} - 1 \end{cases}$$

Pertanto sostituendo la prima equazione nella seconda si ottiene $zS_n = S_n + z^{n+1} - 1$ da cui segue $S_n(z-1) = z^{n+1} - 1$. Quindi se $z \neq 1$

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

La successione S_n convergerà per $\mid z \mid < 1$. Se $\mid z \mid > 1$ la serie divergerà. Se $z = 1$, allora $S_n = n + 1$ e quindi la successione diverge, mentre se $\mid z \mid = 1$ e $z \neq 1$ la successione $(S_n)_{n\in N}$ non ha limite pur essendo limitata. Il limite della successione delle somme parziali

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k,$$

detta somma parziale di ragione z, è un numero complesso se e solo se $\mid z \mid < 1$ e vale

$$\frac{1}{1-z},$$

cioè

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

4. Serie numeriche

Definizione 4.1. *Sia $\{a_n\}_{n\in N}$ una successione numerica in $\mathbb{C}$. Sia $\{S_n\}_{n\in N}$ la successione delle somme parziali associata alla successione $\{a_n\}_{n\in N}$, dove per ogni $j \in N$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_j$. La successione $\{S_n\}_{n\in N}$ è detta serie di termine $n-$esimo $a_n \in \mathbb{C}$.*

Si noti come le serie non siano altro che successioni. Non solo, data una serie $\{S_n\}_{n\in N}$ di termine $n-$esimo $a_n \in \mathbb{C}$ individuiamo univocamente la successione $\{a_n\}_{n\in N}$ data dai temini n-esimi come $a_n = S_n - S_{n-1}$. Mentre, si veda la definizione di serie numerica, associata ad ogni $\{a_n\}_{n\in N}$ successione in $\mathbb{C}$ si abbia la successione delle somme parziali successione $\{S_n\}_{n\in N}$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_j$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con la quale definiamo la serie di termine $n-$esimo $a_n \in \mathbb{C}$.

Definizione 4.2. *Sia $\{a_n\}_{n\in N}$ una successione numerica in $\mathbb{C}$ ed $\{S_j\}_{j\in N}$ la serie associata. Diremo che la serie è convergente se la successione $\{S_j\}_{j\in N}$ è convergente. Tale limite, quando esiste, è detto somma della serie ed è indicato con il simbolo*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Diremo che la serie è divergente in $\mathbb{C}$ se $\{S_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge in $\mathbb{C}$.

Definiremo infine irregolare o oscillante la serie che non rientra nei casi precedenti.

Per quanto riguarda le notazioni, per indicare una serie utilizzeremo lo stesso simbolo con il quale indichiamo la somma della serie, quando questa converge, anche quando la serie non è convergente.

Osserviamo inoltre che la convergenza di una serie non dipende dall'aver eliminato un numero finito di termini della serie medesima. Infatti se $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ è convergente ciò significa che esiste ed è un numero complesso il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Pertanto supponendo di eliminare i primi k termini della serie ci ritroveremmo con la seguente successione di somme parziali

$$\sum_{i=k}^{n} a_i.$$

D'altra parte

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i - (\sum_{i=0}^{k-1} a_i)$$

e quindi il membro di sinistra ha limite, per $n \to \infty$, se e solo se ha limite il primo addendo del membro di destra.

Lemma 4.1. *Siano $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ due serie numeriche in $\mathbb{C}$. Se $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ sono entrambe convergenti, allora*

i) *la serie $\sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i)$ è convergente e*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i;$$

ii) *per ogni $c \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(ca_i) = c\sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Teorema 4.1. *(Criterio di Cauchy) Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie numerica in $\mathbb{R}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie data sia convergente è che sia verificata la seguente condizione:*

$$\textit{per ogni } \epsilon > 0, \ \textit{ esiste } k(\epsilon) \in \mathbb{N} : \mid \sum_{i=n}^{m} a_i \mid < \epsilon, \ \textit{ per ogni } m, n \in \mathbb{N}, k(\epsilon) < n \leq m.$$

Quale corollario otteniamo la seguente condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica.

Lemma 4.2. *(Condizione necessaria per la convergenza di una serie)*
Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie numerica in $\mathbb{C}$. Se tale serie è convergente, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

5. Serie a termini non negativi

Definizione 5.1. *Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie a termini reali. Diremo che $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ è una seire a termini non negativi se per ogni $i \in \mathbb{N}$, $a_i \geq 0$.*

Teorema 5.1. *Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie a termini non negativi. Se la serie data non è divergente, allora è convergente.*

La dimostrazione di questo risultato ùna conseguenza del Teorema d'esistenza del limite per le successioni monotone. Infatti la successione delle somme parziali è monotona crescente in quanto per ogni $n \in N$

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} a_i = S_n + a_{n+1} \geq S_n,$$

essendo $a_{n+1} \geq 0$ per ipotesi.

Pertanto, ricordando il Teorema d'esistenza del limite per le successioni monotone, esiste

$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Se la successione è limitata (superiormente) allora

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sup_N S_n \in \mathbb{R}.$$

In alternativa, nel caso in cui la successione delle somme parziali non sia superiormente limitata, tale successione è positivamente divergente.

Per mettere in evidenza che esistono anche serie irregolari, consideriamo la seguente serie a termini di segno alterno $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Scrivamo i primi termini della successione delle somme parziali. $S_1 = -1$, $S_2 = 0$, $S_3 = -1$, $S_4 = 0$, procedendo per induzione si ha che $S_{2k} = 0$ e $S_{2k+1} = -1$. Quindi non potrà esistere il limite della successione $\{S_n\}_{n\in N}$. Cioè la serie è irregolare

Teorema 5.2. *Siano $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ due serie a termini non negativi. Se per ogni $n \in N$, $a_n \leq b_n$, allora:*

i) *se la serie $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ è convergente, allora anche la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ è convergente.*
ii) *se la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ è positivamente divergente, allora anche la serie $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ è positivamente divergente.*

La prova di questo risultato può essere data nel modo seguente. Indichiamo con S_n e P_n rispettivamente le sommatorie parziali delle serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$. Per ogni $n \in N$,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \leq \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

Esaminiamo il primo caso. Se la serie $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ è convergente, allora $\lim_{n\to\infty} P_n = \sup_n P_n \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$S_n \leq \sup_n P_n.$$

D'altra parte S_n è monotona non decrescente e limitata, quindi esiste $\lim_{n\to\infty} S_n$ reale. Se $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ è positivamente divergente, allora $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ e dal Teorema del confronto per le successioni segue che anche $\lim_{n\to\infty} P_n = +\infty$.

Lemma 5.1. *(Criterio di convergenza integrale) Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa e monotona decrescente. Allora:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

converge se e solo se f è integrabile in senso generalizzato.

Applicazioni

Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (serie armonica generalizzata di esponente α). Se $\alpha \leq 0$, allora la serie è divergente perché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} > 0$. Esaminiamo i casi in cui $\alpha > 0$. Applichiamo il criterio di convergenza integrale. La funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ soddisfa le ipotesi al punto 1) del criterio di convergenza integrale. Quindi $\alpha > 1$ la serie è convergente. Nel caso in cui $\alpha \in]0,1]$, allora la funzione $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$ soddisfa le condizione del punto 2) e pertanto in questo caso la serie diverge. Infatti f in questo caso non è integrabile in s.g.

Iprecedenti criteri possono essere estesi ai casi in cui $a_n \le b_n$ per ogni $n \ge k$ con $k \in N$. Infatti il carattere della serie, vale a dire il fatto che converga, diverga o, nel caso delle serie numeriche a termini qualunque, sia irregolare, non dipende dal trascurare un numero finito di termini.

Esempio

La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{10^6}{n^2}$ è convergente, perchè anche se il segno dei primi 10^3 termini non è sempre positivo. Tuttavia, per $n^2 > 10^6$, si ha che $\sin \frac{10^6}{n^2} > 0$. D'altra parte è noto che $\sin x \le x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, quindi dal criterio del confronto segue che $\sum_{i=10^3}^{\infty} \sin \frac{10^6}{n^2}$ è convergente perché converge la serie armonica generalizzata $\sum_{i=10^3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. I primi 10^3 elementi concorrono esclusivamente a determinare la somma della serie e non il suo carattere, in questo caso, convergente.

Lemma 5.2. *(Criterio della radice $n-$esima) Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie a termini non negativi.*

1) *Se per ogni $n \in N$, $\sqrt[n]{a_n} \le l < 1$, allora la serie è convergente.*
2) *Se per ogni $n \in N$, $\sqrt[n]{a_n} \ge l \ge 1$, allora la serie è divergente.*
3) *Se esiste*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \bar{\mathbb{R}}$$
e $q < 1$, allora la serie è convergente. Mentre se $q > 1$ la serie è divergente.

Lemma 5.3. *(Criterio del rapporto) Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie a termini positivi.*

1) *Se per ogni $n \in N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le l < 1$, allora la serie è convergente.*
2) *Se per ogni $n \in N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge l \ge 1$, allora la serie è divergente.*
3) *Se esiste*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \bar{\mathbb{R}}$$
e $q < 1$, allora la serie è convergente. Mentre se $q > 1$ la serie è divergente.

Lemma 5.4. *(Criterio del confronto asintotototico) Siano $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ due serie a termini non negativi. Supponiamo che $a_n \sim b_n$, per $n \to \infty$. Allora*

1) *la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge se solo se converge la serie $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$.*
2) *la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ diverge se solo se diverge la serie $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$.*

6. Serie numeriche a termini qualunque

Definizione 6.1. *(Convergenza assoluta) Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie a termini complessi. Se la serie $\sum_{i=0}^{\infty} | a_i |$ è convergente, allora diremo che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ è assolutamente convergente.*

Lemma 6.1. *Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ una serie a termini complessi. Se la serie data è assolutamente convergente allora la serie è anche convergente.*

Il viceversa è falso, si pensi al caso della serie armonica.

Lemma 6.2. *(Criterio di Dirichlet) Sia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$ una serie a termini complessi . Se*

(i) *esiste $M \ge 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$*
$$| \sum_{i=1}^{n} a_i | \le M$$
(ii) *$\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{R}$ tale che per ogni $i \in \mathbb{N}$, $b_i \ge 0$, e $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora la serie è convergente.*

Lemma 6.3. *(Criterio di Liebnitz) Sia $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i b_i$ una serie a termini reali. Se $(b_i)_{i\in N}$ è non negativa e monotona decrescente con $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, allora la serie è convergente.*

Esempio $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ non è assolutamente convergente, ma è (semplicemente) convergente per il criterio di Leibnitz.

7. Esercizi svolti

ESERCIZIO 1

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini reali positivi. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:
a) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora la successione $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ è decrescente
b) se $a_n \to 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente
c) se $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, per $n \to +\infty$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente
d) se

$$\exists \lim_{n\to+\infty} n^2 a_n \leq 3 ,$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Svolgimento

La risposta a) è da scartare, perché la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ così definita:

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{i^2}, & \text{se } i \text{ è pari} \\ (\frac{1}{2^i}), & \text{se } i \text{ è dispari,} \end{cases}$$

converge ma $(a_i)_{i\in N}$ non è decrescente.

La risposta b) è da scartare, perché la serie armonica costituisce un controesempio.

La risposta c) è da scartare, perché

$$\frac{1}{n\log n} = o(\frac{1}{n}),$$

per $n \to infty$, ma la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n},$$

non è convergente, si pensi alla non convergenza della funzione $\frac{1}{x\log x}$ su $[2, \infty[$.

La risposta esatta ̀la d), infatti se

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n \leq 3,$$

allora esiste $\bar{n} \in N$ tale che per ogni $n > \bar{n}$

$$a_n \leq \frac{4}{n^2}.$$

Pertanto, ricordando il criterio del confronto la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

è convergente.

ESERCIZIO 2

Facoltativo Il candidato svolga il seguente esercizio in dettaglio in un foglio allegato. Determinare gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \log^\alpha\left(n^2+1\right)$$

è convergente.

Svolgere l'esercizio.