Es. 1

Sia $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.a. t.c. $\#X(\Omega) \leq \#\mathbb{N}$. Sia $p: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ la densità di probabilità associata a X. Se $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| p(x) < +\infty$ allora diremo che X ha speranza matematica finita e chiameremo speranza matematica di X il numero

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x \, p(x)$$

che verrà indicato con il simbolo $E[X]$.

Sia $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.a. t.c. $\#X(\Omega) \leq \#\mathbb{N}$. Sia $p: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ la densità di probabilità associata a X. Sia X dotata di speranza matematica finita $\mu = E[X]$. Se la v.a. $(X-\mu)^2$ ha speranza matematica finita chiameremo varianza (o momento centrato di ordine 2 finito) il numero

$$\sum_{x \in X(\Omega)} (x-\mu)^2 p(x)$$

che indicheremo con il simbolo $Var(X)$.

/—/

Determiniamo il valore di c per cui p è una densità di probabilità con supporto in A. In particolare dobbiamo avere

$$\sum_{(x,y) \in A} c(x^2+y^2+1) = 1 \iff c(16+4+1) + c(1+1+1) + c(4+1+1) + c(4+16+1) =$$

$$\iff c(21+3+6+21) = 1 \iff c = \frac{1}{51}.$$

Le densità marginali

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \{1,2,4\} \\ \displaystyle\sum_{(x,y) \in A} \frac{1}{51} \cdot (x^2+y^2+1), & \text{se } x \in \{1,2,4\} \end{cases}$$

in particolare $p_X(1) = p(1,1)$; $p_X(2) = p(2,1) + p(2,4) = \frac{1}{51} \cdot 24$

$p_X(4) = p(4,2)$.

Analogamente

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0 \ , & y \notin \{1,2,4\} \\ \sum_{(x,y)\in A} \frac{1}{51}(x^2+y^2+1) \ , & y \in \{1,2,4\} \ , \end{cases}$$

in particolare $p_Y(1) = p(1,1) + p(2,1) = \frac{1}{51}(3+6) = \frac{9}{51}$

$p_Y(2) = p(4,2)$; $p_Y(4) = p(2,4)$.

Calcoliamo $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$ e $E[X^2]$:

$$E[X] = 1 \cdot p_X(1) + 2\, p_X(2) + 4\, p_X(4) = p(1,1) + 2 \cdot \frac{1}{51} \cdot 27 + 4 \cdot p(4,2)$$

$$= \frac{1}{51}\left(3 + 2 \cdot 27 + 4 \cdot 21\right) = \frac{1}{51}(3+54+84) = \frac{141}{51}$$

$$E[Y] = 1 \cdot p_Y(1) + 2\, p_Y(2) + 4\, p_Y(4) = \frac{9}{51} + 2 \cdot \frac{21}{51} + 4 \cdot \frac{21}{51}$$

$$= \frac{1}{51}(9+42+84) = \frac{135}{51}$$

$$E[XY] = \sum_{(x,y)\in A} xy\, p(x,y) = 8 \cdot p(4,2) + 1 \cdot p(1,1) + 2\, p(2,1) + 8\, p(2,4)$$

$$= 8 \cdot \frac{21}{51} + \frac{3}{51} + 2 \cdot \frac{6}{51} + 8 \cdot \frac{21}{51} = \frac{1}{51}(168+3+12+168)$$

$$= \frac{351}{51}$$

$$E[X^2] = 1 \cdot p_X(1) + 2^2 p_X(2) + 4^2 p_X(4) = \frac{3}{51} + 4 \cdot \frac{27}{51} + 16 \cdot \frac{21}{51}$$

$$= \frac{1}{51}(3+108+336) = \frac{447}{51}$$

Quindi

$$Var(x) = E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{447}{51} - \left(\frac{141}{51}\right)^2 = \frac{1}{51}\left(447 - \frac{141^2}{51}\right)$$

$$= \frac{1}{51}\left(\frac{22797 - 19881}{51}\right) = \frac{2916}{51} = \frac{972}{17}$$

$$Cov(X,Y) = E[xy] - E[x]\cdot E[y] = \frac{351}{51} - \frac{141}{51}\cdot\frac{135}{51} = \frac{1}{51^2}(351\cdot 51 - 141\cdot 135)$$

$$= \frac{1}{51^2}(17901 - 19035) = -\frac{1134}{51^2}$$

Quindi $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \dfrac{-1134}{51^2}\cdot\dfrac{17}{972} \simeq -7{,}6\cdot 10^{-3}$,

mentre

$$b = E[y] - \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} E[x] \quad , \quad \text{cioè}$$

$$b = \frac{135}{51} + \frac{1134}{51^2}\cdot\frac{17}{972}\cdot\frac{141}{51}$$

Da cui $y = ax+b$ (retta di regressione).

Es. 2 Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità

La funzione di ripartizione per X è $F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

t.c. per ogni $t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

Se poi esiste f localmente Riemann integrabile su $\mathbb{R}$ t.c.

$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$, allora f è detta densità di probabilità per X.

La funzione di ripartizione di Z è $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$

ma $Z = (9X+2)^2$ e $\{(9X+2)^2 \leq t\} = \begin{cases} \phi & \text{se } t<0 \\ \left\{\frac{-\sqrt{t}-2}{9} \leq X \leq \frac{\sqrt{t}-2}{9}\right\} \end{cases}$

Quindi

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \mathbb{P}\left(\frac{-\sqrt{t}-2}{9} \leq X \leq \frac{\sqrt{t}-2}{9}\right), & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

D'altra parte è nota la densità di probabilità di X

che è $N(2,3^2)$, cioè $f(s) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(s-2)^2}{18}}$

Quindi

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \int_{\frac{-\sqrt{t}-2}{9}}^{\frac{\sqrt{t}-2}{9}} f(s)\,ds, & t>0 \end{cases}$$

Pertanto una densità per Z è

$$g_Z(t) = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } t<0 \\ f\left(\frac{\sqrt{t}-2}{9}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}\cdot 9} + f\left(\frac{-\sqrt{t}-2}{9}\right) \frac{1}{2\sqrt{t}\cdot 9} \ , & t>0 \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dt} F_Z(t)$$

Finalmente

$$g_Z(t) = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } t<0 \\ \frac{1}{9\sqrt{t}} \left(f\left(\frac{\sqrt{t}-2}{9}\right) + f\left(\frac{-\sqrt{t}-2}{9}\right)\right) ; & \text{se } t>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \ , & \text{se } t<0 \\ \frac{1}{27\sqrt{2\pi t}} \cdot \left(e^{-\left(\frac{\sqrt{t}-2}{9}-2\right)^2 \frac{1}{18}} + e^{-\left(\frac{\sqrt{t}+2}{9}+2\right)^2 \frac{1}{18}} \right) , & t>0 \end{cases}$$

<u>ES. 3</u> Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità $B \in \mathcal{A}$, $P(B)>0$. Definiamo probabilità condizionale di $A \in \mathcal{A}$ dato B il numero

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ES. 4 Sia X, Y v.a. discrete su uno sp. di prob. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Diciamo che X e Y sono indipendenti se e solo se per ogni scelta di $A, B \subset \mathbb{R}$

$$\underline{P}(X \in A, Y \in B) = \underline{P}(X \in A)\, \underline{P}(Y \in B).$$

ES. 5 Affinché p sia una densità di probabilità occorre che $p(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\sum_{x \in \mathbb{N} \cup \{0\}} p(x) = c \sum_{x \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (\alpha^2 - 5\alpha + 7)^x = 1$.

Quindi $c = \dfrac{1}{\sum_{x \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (\alpha^2 - 5\alpha + 7)^x}$. Affinché ciò si verifichi occorre che

$\alpha^2 - 5\alpha + 7 > 0$ e $(\alpha^2 - 5\alpha + 7) < 1$. Risolviamo

$$\begin{cases} \alpha^2 - 5\alpha + 7 > 0 \\ \alpha^2 - 5\alpha + 7 < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \ (\text{perché } \Delta = 25 - 49 < 0) \\ \alpha^2 - 5\alpha + 6 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ 2 < \alpha < 3 \end{cases}$$

In particolare $c = \dfrac{1}{\frac{1}{1 - (\alpha^2 - 5\alpha + 7)}} = 1 - \alpha^2 + 5\alpha - 7 = 5\alpha - 6 - \alpha^2$

per $\alpha \in (2, 3)$.

ES. 6. La probabilità di successo, cioè che il passeggero si presenti è $p = 1 - \frac{4}{100} = 0{,}96$. Su 154 casi abbiamo una v.a. X, $B(154, p)$. Per cui $\underline{P}(X \geq 126)$ indica la probabilità che almeno due passeggeri non partano, il 125° e il 126 almeno.

Quindi

$$\underline{P}(X \geq 126) = \sum_{K=126}^{154} \binom{154}{K} (0{,}96)^K (0{,}04)^{154-K} .$$

ES. 7 (Non utile per il superamento)

Possiamo modellizzare il problema supponendo di introdurre una v.a. che conta i successi, dove in questo caso il successo è il sesso femminile del cucciolo. La probabilità che un cucciolo sia di sesso femminile è $\frac{1}{2}$. Pertanto abbiamo una densità $B(4, \frac{1}{2})$. Confrontiamo $P(X=2)$ con $\underline{P}(X \neq 2)$

$\underline{P}(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, mentre

$P(X \neq 2) = 1 - P(X=2) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Quindi $P(X \neq 2) > \underline{P}(X=2)$.

Si osservi che la prob di avere comunque animali di sesso diverso (ma non tutti dello stesso sesso) in numero non uguale è comunque maggiore di $P(X=2)$. Infatti:

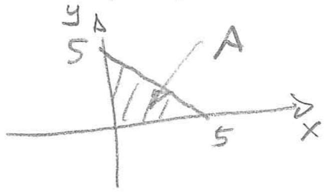
$\underline{P}(X=1) + P(X=3) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$.

ES. 8

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 5,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

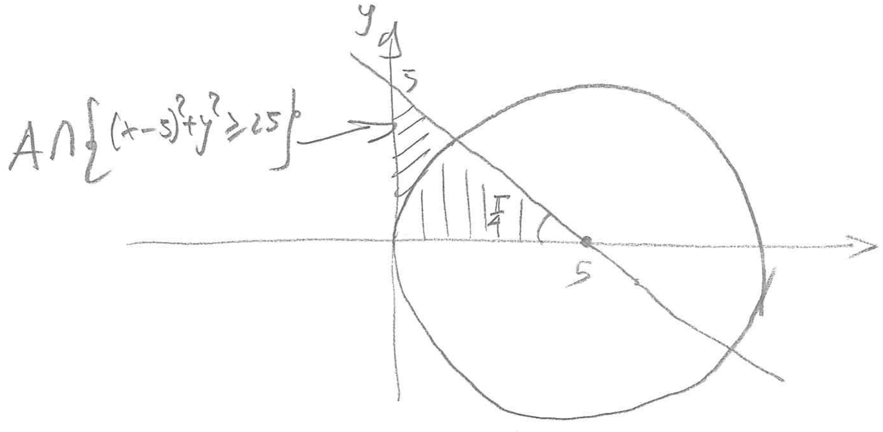
$\underline{P}((X-5)^2 + Y^2 \geq 25) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$ con f densità uniforme su A. Determiniamo f su A, $f = \frac{\chi_A}{|A|}$

dove $|A| = \iint_A 1\,dx\,dy = \frac{25}{2}$ perché



Quindi $f(x,y) = \frac{\chi_A(x,y)}{\frac{25}{2}} = \frac{2}{25}\chi_A(x,y)$ con χ_A funzione caratteristica su A

$$\mathbb{P}\left((x-5)^2+y^2 \geq 25\right) = \iint\limits_{\{(x-5)^2+y^2\geq 25\}} \frac{2}{25}\chi_A(x,y)\,dx\,dy = \frac{2}{25}\iint\limits_{A\cap\{(x-5)^2+y^2\geq 25\}} dx\,dy$$



$$\iint\limits_{A\cap\{(x-5)^2+y^2\geq 25\}} dx\,dy = |A| - \text{area}\left(\text{settore circolare di angolo } \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{25}{2} - \frac{1}{8}\pi\cdot 5^2 = 25\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{25}{8}\left(\frac{4-\pi}{8}\right)$$

Quindi $P\left((x-5)^2+y^2\geq 25\right) = \frac{2}{\cancel{25}}\cdot\frac{\cancel{25}}{8}\left(\frac{4-\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\frac{(4-\pi)}{8} = \frac{4-\pi}{32}$.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \frac{2}{25}\int_0^{5-x} dy = \frac{2}{25}(5-x), & \text{se } 0\leq x<5 \\ 0 & \text{se } x\geq 5 \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{2}{25}\int_0^{5-y} dx = \frac{2}{25}(5-y), & \text{se } 0\leq y<5 \\ 0 & \text{se } y\geq 5. \end{cases}$$

Si osservi che $f_X \cdot f_Y = f(x,y)$ su un insieme di misura non nulla per esempio su $B(0,\varepsilon)$. quindi le v.a. non sono indip.

ES. 9 $\quad$ 3 numeri azzeccati su 5 giocati. (Ipergeom.)

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{50}{2}}{\binom{55}{5}} = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{50!}{2!\,48!} \cdot \frac{5!\,50!}{55!}$$

$$= \frac{4\cdot 5}{2} \cdot \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 48\cdot 50}{51\cdot 52\cdot 53\cdot 54\cdot 55} = 10 \cdot \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 49\cdot 50}{51\cdot 52\cdot 53\cdot 54\cdot 55}$$

$$\frac{1}{55} \cdot \frac{1}{54} \cdot \frac{1}{53}$$