

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ' (parte di Elementi di Calcolo
delle Probabilità) del 20/07/2012

COGNOME, NOME, numero di matricola
Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante.

(1) [1 punto] Una ditta produce biglie di vetro colorato. Il 27% delle palline prodotte è verde. Vengono preparate confezioni di 7 pezzi ciascuna. Supponendo che la scelta delle palline che compongono le confezioni avvenga indipendentemente dalla scelta delle palline precedenti: (i) calcolare la probabilità che in una confezione ci siano al più 3 palline verdi; (ii) calcolare la probabilità che in una confezione ci siano almeno 3 palline verdi.

(2) [1 punto] Definizione di variabile aleatoria in uno spazio di probabilità.

(3) [1,5 punti] Siano X e Y due variabili aleatorie reali di densità congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{120}{5^6} x^3 y, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A, \end{cases}$$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$. Calcolare

$$P(X^2 + Y^2 \leq \frac{5^2}{2}).$$

(4) [1,5 punti] Sia X una variabile aleatoria reale di densità esponenziale

$$f(x) = \begin{cases} 6e^{-6x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$ e $\text{Var}(X)$. Sia ora Y una seconda variabile aleatoria indipendente da X e avente la stessa densità di probabilità. Calcolare la densità di $X + Y$.

(5) [1 punto] Definizione di due eventi indipendenti.

(6) [1 punto] La definizione di densità congiunta di una famiglia di v.a. discrete.

(7) [1 punto] La serie geometrica.

(8) [1 punto] Sia (X, Y) una variabile aleatoria a valori discreti in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $(X, Y) = (m, n)$ con densità $p(m, n) = \frac{m+1}{9}$, se $(m, n) \in \{(0, 5), (0, 6), (1, 6), (2, 6), (1, 7)\}$, altrimenti $p(m, n) = 0$. Calcolare $E[5X + Y]$.

(9) [1 punto] Nel piano sono assegnati 70 punti non allineati a tre a tre. Calcolare quanti sono i poligoni non intrecciati di 4 lati che si possono costruire (un poligono è una spezzata chiusa non intrecciata). Calcolare poi la probabilità di estrarre a caso, tra i poligoni così individuati, un poligono prefissato.

(10) [1 punto] Definizione di densità congiunta di variabili aleatorie reali.