COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA' (Primo appello, parte di probabilità, commissione F. Ferrari, G. Grammatico) del 10/06/2014

COGNOME................................., NOME......................................, n. mat. ....

Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante o su un foglio protocollo. Gli studenti che supereranno la presente prova e che desiderano sostenere la prova di Analisi Matematica 2 devono iscriversi nelle apposite liste di AlmaEsami.

---

(1) [1,5 punti] Sia X una variabile aleatoria, a valori reali, di densità $N(2, 3^2)$. Calcolare la densità di $Z = \log(2 + X^2)$.

---

(2) [1 punto] Sia assegnata una variabile aleatoria a valori in $\{0, 1\}$ la cui densità di probabilità è $B(1, \frac{1}{3})$. Sia Y un'altra variabile aleatoria a valori in $\{1, 2, \dots, 6\}$ con densità uniforme. Se X e Y sono indipendenti, calcolare $P(X = 0, Y = 3)$. Sia Z è la variabile aleatoria che conta i successi dell'evento $\{X = 0,\ Y = 3\}$ in una sequenza di 7 casi. La probabilità di successo è il valore calcolato nel quesito precedente. Calcolare la probabilità che l'evento $\{X = 0,\ Y = 3\}$ si realizzi al più 6 volte.

---

(3) [1 punto] Determinare $c > 0$ in modo tale che $p(x) = c\dfrac{3^x}{17^{x+17}}$, $\quad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, altrimenti $p(x) = 0$, sia una densità di probabilità su $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Calcolare poi la speranza matematica della v.a. X a valori in $\mathbb{N} \cup \{0\}$ la cui densità è definita dalla funzione p.

---

(4) [2 punti] Siano X e Y due variabili aleatorie continue con densità congiunta uniforme in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \dfrac{x^2}{7^2} + \dfrac{y^2}{2^2} \leq 1\}$. Calcolare $P(|X| + |Y| \geq 2)$. Determinare le densità marginali f_X e f_Y e stabilire se sono indipendenti.

(5) [1 punto] Scrivere la definizione di varianza di una variabile aleatoria discreta ed esplicitare la formula con cui ottenere la varianza della somma di due variabili aleatorie X e Y.

(6) [1 punto] Un'urna contiene 7 palline rosse e 5 palline verdi. Calcolare la probabilità che estraendo 9 palline almeno 6 siano rosse.

(7) [1 punto] Scrivere la definizione di successione di variabili aleatorie convergente in legge.

(8) [1,5 punti] Siano X e Y due variabili aleatorie tali che $X = Y + W$ e W un'altra variabile aleatoria di speranza matematica nulla e varianza 2^2. Supponiamo che W sia indipendente da Y. Si determini una stima di Y a partire da X calcolando la retta di regressione sapendo che la speranza matematica di Y è 4 e la sua varianza è 7^2.

(9) [1 punto, **non utile per il superamento della prova**] Su un piano vi sono 10 punti. Sappiamo che per nessuna terna di punti, comunque selezionata nell'insieme dato, passa una retta. Calcolare quanti sono i triangoli che possiamo costruire con i punti assegnati. Calcolare quanti sono i triangoli che hanno un lato comune con il triangolo di vertici $1, 2, 3$ e la probalità che scegliendo a caso un triangolo, questo non sia fra quelli che hanno un lato in comune con quello di vertici $1, 2, 3$.

(10) [1 punto] Scrivere una condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica.