

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI
CALCOLO DELLE PROBABILITA' (parte di Elementi di Calcolo
delle Probabilità) del 03/07/2012

COGNOME, NOME, numero di matricola
Riconsegnare il testo. Rispondere, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante le domande.

(1) [1 punto] Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti su uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{A}, P) . Se $P(\{X \in A\} \cup \{Y \in B\}) = P(X \in A) + P(Y \in B)$ e $\frac{1}{4} = P(X \in A)$, $q = P(Y \in B)$ allora:

a $q = 1$;

b $q > \frac{3}{4}$;

c $q \geq \frac{3}{8}$;

d $q = 0$;

e $\frac{1}{4}$ e q sono soluzioni di $\frac{1}{4}x^2 + \beta x + 1 = 0$ per un opportuno valore di β .

(2) [1 punto] Cardinalità di un insieme prodotto cartesiano di insiemi di cardinalità finita.

(3) [1,5 punti] Siano X e Y due variabili aleatorie reali di densità congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6xy^2}{5^5}, & (x, y) \in [0, 5] \times [0, 5] \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, 5] \times [0, 5]. \end{cases}$$

Calcolare

$$P(49X^2 + 9Y^2 \leq 25).$$

(4) [1 punto] Formula delle probabilità totali.

(5) [1,5 punti] Sia X una variabile aleatoria reale di densità esponenziale

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Calcolare $E[X^2]$. Sia ora Y una seconda variabile aleatoria indipendente da X e avente la stessa densità di probabilità. Calcolare la densità di $X + Y$.

(6) [1 punto] La definizione di variabili aleatorie indipendenti.

(7) [1 punto] Criterio di convergenza per le serie numeriche reali a termini positivi: il criterio integrale.

(8) [1 punto] Sia X una variabile aleatoria discreta tale che $X = \frac{k}{5}$, $k = 0, 1, 2$ con densità $p(\frac{k}{5}) = \frac{2!}{k!(2-k)!}(0,3)^k(0,7)^{2-k}$, $k = 0, 1, 2$. Calcolare $E[X]$ (la speranza matematica di X) e $\text{Var}(X)$ (la varianza di X).

(9) [1 punto] In un'urna sono contenute 116 palline bianche e 121 palline rosse. Vengono estratte senza rimpiazzo 103 palline. Calcolare la probabilità che la 103-esima pallina sia rossa se la 102-esima è bianca.

(10) [1 punto] Definizione di densità marginale.