

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI  
CALCOLO DELLE PROBABILITA' (parte di Elementi di Calcolo  
delle Probabilità) del 03/07/2012

COGNOME, NOME, numero di matricola .....  
Riconsegnare il testo. Rispondere, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante le domande.

---

(1) [1 punto] Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie indipendenti su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Se  $P(\{X \in A\} \cup \{Y \in B\}) = P(X \in A) + P(Y \in B)$  e  $\frac{1}{4} = P(X \in A)$ ,  $q = P(Y \in B)$  allora:

a  $q = 1$ ;

b  $q > \frac{3}{4}$ ;

c  $q \geq \frac{3}{8}$ ;

d  $q = 0$ ;

e  $\frac{1}{4}$  e  $q$  sono soluzioni di  $\frac{1}{4}x^2 + \beta x + 1 = 0$  per un opportuno valore di  $\beta$ .

---

(2) [1 punto] Cardinalità di un insieme prodotto cartesiano di insiemi di cardinalità finita.

---

(3) [1,5 punti] Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie reali di densità congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6xy^2}{5^5}, & (x, y) \in [0, 5] \times [0, 5] \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0, 5] \times [0, 5]. \end{cases}$$

Calcolare

$$P(49X^2 + 9Y^2 \leq 25).$$

---

(4) [1 punto] Formula delle probabilità totali.

---

(5) [1,5 punti] Sia  $X$  una variabile aleatoria reale di densità esponenziale

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Calcolare  $E[X^2]$ . Sia ora  $Y$  una seconda variabile aleatoria indipendente da  $X$  e avente la stessa densità di probabilità. Calcolare la densità di  $X + Y$ .

---

(6) [1 punto] La definizione di variabili aleatorie indipendenti.

---

(7) [1 punto] Criterio di convergenza per le serie numeriche reali a termini positivi: il criterio integrale.

---

(8) [1 punto] Sia  $X$  una variabile aleatoria discreta tale che  $X = \frac{k}{5}$ ,  $k = 0, 1, 2$  con densità  $p(\frac{k}{5}) = \frac{2!}{k!(2-k)!}(0,3)^k(0,7)^{2-k}$ ,  $k = 0, 1, 2$ . Calcolare  $E[X]$  (la speranza matematica di  $X$ ) e  $\text{Var}(X)$  (la varianza di  $X$ ).

---

(9) [1 punto] In un'urna sono contenute 116 palline bianche e 121 palline rosse. Vengono estratte senza rimpiazzo 103 palline. Calcolare la probabilità che la 103-esima pallina sia rossa se la 102-esima è bianca.

---

(10) [1 punto] Definizione di densità marginale.