

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (Primo appello, parte di
Elementi di Calcolo delle Probabilità) del 01/07/2013

COGNOME....., NOME....., n. mat.
Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante.

(1) Siano X e Y due variabili aleatorie di densità congiunta $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{28\pi}, & (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} \leq 1\} \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} \leq 1\}. \end{cases} \quad (1)$$

- (i) [1,5 punti] Calcolare $P(49X^2 + 16Y^2 > 112)$.
(ii) [1 punto] Calcolare le densità marginali f_X e f_Y .
(ii) [1 punto] (**Domanda facoltativa non valida per l'ammissione**) Verificare se le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti motivando esaurientemente la risposta data.

(2) [1 punto] Sia T una variabile aleatoria di densità geometrica di parametro $\frac{1}{5}$ che conta i successi. Sapendo che non si è ottenuto alcun successo nelle prime 16 prove calcolare la probabilità che il primo successo avvenga alla 3 prova successiva alla 16-esima.

(3) [1 punto] Scrivere l'enunciato del Teorema di Riemann-Dini.

(4) [1 punto] Un'urna contiene 21 palline rosse e 8 bianche. Ne vengono estratte 9 senza rimpiazzo. Calcolare la probabilità di estrarne al più 7 bianche.

(5) [1,5 punti] Sia X una variabile aleatoria reale di densità normale $N(0,1)$. Determinare la densità della variabile aleatoria $\log(6X)$.

(6) [1 punto] La formula di Bayes.

(7) [1 punto] In una biblioteca ci sono 33 scaffali ciascuno contenete 300 libri. Calcolare la probabilità di selezionare casualmente 30 libri che non appartengono agli scaffali 1 e 3 supponendo che dopo aver selezionato un libro questo venga riposto nello stesso posto e nello stesso scaffale.

(8) [1 punto] Scrivere l'enunciato del Teorema della legge sui grandi numeri.

(9) [1 punto] Scrivere la definizione di spazio di probabilità (elencando gli assiomi di Kolmogorov, cioè precisando che cos'è una σ -algebra e quali proprietà ha la funzione di probabilità).