COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA' (Seconda prova in itinere di Elementi di Calcolo delle Probabilità) del 6/06/2014

COGNOME................................., NOME......................................, n. mat. ....
Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante o su un foglio protocollo. Gli studenti che supereranno la presente prova e che desiderano sostenere la prova di Analisi Matematica 2 devono iscriversi nelle apposite liste di AlmaEsami.

---

(1) [1 punto] Sia X una variabile aleatoria a valori in $\{0, 1, \ldots, 6\}$ di densità $B(6, \frac{1}{6})$ (ordine 6 e parametro $\frac{1}{6}$). Calcolare $P(X \leq 5)$.

---

(2) [2,5 punti] In un'urna vi sono 8 palline rosse e 9 palline verdi. Si estraggono 4 palline senza rimpiazzo. Calcolare la probabilità che fra le palline estratte ve ne siano almeno 2 rosse. Si risponda inoltre al quesito posto, supponendo che invece vi sia rimpiazzo ad ogni estrazione.

---

(3) [1 punto] Sia X una variabile aleatoria a valori in $\{0, 1, 2\}$. Calcolare la speranza matematica e la varianza di X sapendo che la sua densità è $B(2, \frac{1}{4})$.

---

(4) [2,5 punti] Siano X e Y due variabili aleatoria di densità congiunta uniforme f su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 7^2\}$. Calcolare $P(\frac{X^2}{7^2} + 4\frac{Y^2}{7^2} \geq 1)$. Determinare le densità marginali f_X e f_Y, stabilendo se le variabili X e Y sono indipendenti. Indicare infine, senza calcolo esplicito, l'espressione della densità di probabilità della variabile aleatoria $X + Y$.

(5) [1 punto] Nell'insieme Ω delle funzioni da $D = \{1, \dots, 6\}$ a $C = \{1, \dots, 11\}$, dotato della legge di probabilità uniforme, calcolare la probabilità del singoletto $\{\mathrm{id} : D \to C\}$, dove *id* indica la funzione identità (cioè per ogni $x \in D$, $\mathrm{id}(x) = x$), e dell'evento $A = \{f \in \Omega : f : D \to C$ è iniettiva$\}$.

(6) [**1 punto, facoltativo, non valido per il superamento della prova**] Se F è la funzione di ripartizione strettamente crescente di una variabile aleatoria assolutamente continua, si chiama $\alpha-$ quantile la soluzione q_α dell'equazione $F(q_\alpha) = \alpha$. Calcolare q_α per $\alpha = \frac{1}{2}$ (in questo caso $q_{1/2}$ si chiama mediana) quando la densità della v.a. è quella esponenziale di parametro 4.

(7) [1 punto] Scrivere l'enunciato del Teorema sulla legge dei grandi numeri.

(8) [1 punto] Scrivere l'enunciato del Teorema del limite centrale.

(9) [1 punto] Scrivere la formula di Bayes.