COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA' (Prova in itinere di Elementi di Calcolo delle Probabilità) del 15/04/2014

COGNOME................................, NOME....................................., n. mat. ....
Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante o su un foglio protocollo.

---

(1) [1,5 punti] Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ esiste $c = c(\alpha) > 0$ tale che

$$p(x) = \begin{cases} cx^{9-\alpha} \sin \dfrac{1}{x^\alpha + 9}, & x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}), \end{cases}$$

è una densità di probabilità su $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

---

(2) [1 punto] Scrivere la definizione di funzione di ripartizione per una variabile aleatoria reale X, precisando che cos'è una densità di probabilità, quando questa esiste.

---

(3) [1 punto] Scrivere le proprietà che rendono P una misura di probabilità.

---

(4) [2 punti] Sia X una variabile aleatoria, a valori reali, di densità $N(0,1)$. Calcolare la densità di $Z = e^{5X}$. [1 punto, non utile per il superamento della prova in itinere] Disegnare un grafico qualitativo della densità ottenuta.

---

(5) [1 punto] Scrivere l'enunciato del Teorema di Riemann-Dini.

(6) [1,5 punti] Sia assegnato

$$A = \{(4,3),(4,1),(4,2),(1,2),(3,2),(3,3)\}.$$

(i) Calcolare il valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $p : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, tale che per ogni $(x,y) \in A$, $p(x,y) = \dfrac{\alpha}{2x \cdot y + 1}$, e per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, $p(x,y) = 0$, sia una densità di probabilità su A.

(ii) Calcolare le densità marginali p_X e p_Y della variabile aleatoria $2-$ dimensionale (X,Y) a valori in A, di densità di probabilità congiunta p definita al punto (i). Calcolare la speranza matematica $E[X]$ e la varianza σ_X^2.

(7) [2 punti] Sia X una variabile aleatoria a valori reali di densità uniforme sull'intervallo $[3,5]$. Calcolare $P(X \leq 4)$ e $Var(X)$.

(8) [1 punto] Scrivere la definizione di speranza matematica di una variabile aleatoria discreta.