Numero delle partizioni di un insieme

Abbiamo già provato che la cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi di cardinalità fissata k di un insieme dato di cardinalità finita n è $\binom{n}{k}$, cioè $\# C_{n,k} = \binom{n}{k}$. In questo modo abbiamo determinato anche la cardinalità dell'insieme delle partizioni in due insiemi aventi rispettivamente k e $n-k$ elementi, se $k \neq \frac{n}{2}$. Infatti se n è pari la cardinalità delle partizioni di $\frac{n}{2}$ elementi è $\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$. Altrimenti vanno considerate come partizioni ordinate.

<u>Domanda</u>: quante sono le partizioni di un insieme in due insiemi? Scrivere la formula. C'è differenza di formula tra n pari e n dispari? Fornire una motivazione.

Supponiamo ora di fissare k_1, k_2, k_3 numeri naturali tali che $k_1+k_2+k_3=n$, dove n è la cardinalità dell'insieme dato. Calcolare quante partizioni in tre insiemi rispettivamente di cardinalità k_1, k_2 e k_3 si possono avere nell'insieme di n elementi. Risposta $\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdot k_3!}$.

<u>Dim.</u> Consideriamo prima il caso in cui le partizioni siano di due soli insiemi il primo di cardinalità k_1 e il secondo di cardinalità k_2+k_3. Allora $n-k_1 = k_2+k_3$. Quindi $\binom{n}{k_1} = \frac{n!}{k!\,(n-k_1)!}$ è il numero di partizioni in due insiemi con k_1 e $n-k_1$ elementi. Per ciascuno degli insiemi di $n-k_1$ elementi possiamo calcolare la cardinalità dei suoi sottoinsiemi di k_2 elementi (possiamo sempre supporre di avere iniziato da $k_1 \le k_2 \le k_3$). Pertanto avremo

$$\binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2} \text{ partizioni, cioè } \frac{n!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \quad \text{perché } n-k_1-k_2=k_3$$

In generale il numero di partizioni* in m insiemi ciascuno di cardinalità k_i $i=1,\dots,m$ t.c. $k_1+k_2+k_3+\dots+k_m=n$ è

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\dots k_m!}.$$

*(ordinate).

Alcuni esempi di applicazione del calcolo combinatorio.

#1 Se 10 atleti partecipano ad una gara, calcolare la probabilità che il podio sia t.c. l'atleta 1 giunga primo al traguardo, l'atleta 2 giunga secondo, l'atleta 3 giunga terzo.

#2 In quanti modi è possibile scrivere una password di 6 caratteri scelti tra 12 simboli speciali e le cifre da 0 a 9?
Rispondere alla stessa domanda se tutti i caratteri devono essere diversi e il primo non deve essere un numero.
Calcolare poi la probabilità che digitando casualmente una sequenza di 6 caratteri tra simboli e cifre si indovini la password.

#3 Trovare il numero di anagrammi (anche senza significato) delle parole

(i) AMORE
(ii) CARTA
(iii) SCRIVERE
(iv) INTERNET

Calcolare poi la probabilità che usando le lettere della parola assegnata si indovini la parola data.

#4 In quanti modi si possono sistemare 6 ospiti in un albergo di 9 stanze singole libere? Calcolare la probabilità che i 6 ospiti siano sistemati nelle prime sei stanze delle 9 disponibili

#5 Calcolare in quanti modi si possono mettere in fila 13 palline di cui 6 rosse, 2 bianche e 5 verdi supponendo che le palline dello stesso colore siano indistinguibili.

#6 In una biblioteca ci sono 27 scaffali ciascuno dei quali contiene 99 libri. (Tutti i libri presenti sono diversi)
Calcolare la probabilità che un lettore che sceglie casualmente 15 libri tutti diversi non li prenda mai nello scaffale n° 3.
Calcolare la probabilità, nel caso in cui i libri vengano scelti a caso supponendo di ammettere anche scelte multiple dello stesso libro, che i libri non vengano scelti nel 3° scaffale.

#7 Se gli organizzatori di un evento vendono 555 biglietti per un concerto sapendo che il 12% degli spettatori di questo tipo di spettacoli non si presenta per assistere al concerto nel teatro che contiene al più 500 persone, si chiede di calcolare la probabilità che almeno due spettatori non possano assistere al concerto.

#8 Una ditta che produce uova con sorpresa decide di inserire un diamante da 0,01 carati come sorpresa con una probabilità dell 15 per mille (15‰) nelle uova.
Se le uova vengono inviate ai negozi in confezioni da 16, calcolare la probabilità che vi sia almeno un uovo contenente il diamante.

#9 Un'urna contiene 7 palline verdi e 4 bianche.
Se si estraggono 5 palline senza ~~rimpiazzo~~, si chiede di calcolare la probabilità di estrarne al più 2 verdi.
Calcore poi la probabilità che se ne estraggono non più di tre verdi e fra queste ve ne sia almeno una verde