# ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ: SVOLGIMENTO DI ALCUNI ESERCIZI SULLE SERIE NUMERICHE

**Esercizio 1** Studiare la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin\frac{1}{n^\gamma}$$
al variare del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$.

Se $\gamma \geq 0$ allora $\frac{1}{n^\gamma} \leq 1$ per ogni $n \geq 1$. Infatti la precedente disuguaglianza è equivalente a $1 \leq n^\gamma$ che è equivalente a $0 \leq \gamma \log n$. L'ultima disuguaglianza è soddifsfatta per $n \geq 1$. Quest ci consente di affermare che per ogni $n \geq 1$ si ha $\sin\frac{1}{n^\gamma} \geq 0$, perché $0 \leq \frac{1}{n^\gamma} \leq \pi$. Si tratta di una serie a termini positivi. Possiamo applicare allora i criteri del confronto asintotico
$$\frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin\frac{1}{n^\gamma} \sim \frac{n^{2\gamma}}{n^3} \sin\frac{1}{n^\gamma} \sim \frac{n^{2\gamma}}{n^3}\frac{1}{n^\gamma} \sim \frac{1}{n^{3-2\gamma+\gamma}} \sim \frac{1}{n^{3-\gamma}}$$
per $n \to \infty$ avendo utilizzato utilizzato la formula di Taylor per stimare $\sin\frac{1}{n^\gamma}$. Pertanto la serie convergerà se e solo se
$$\begin{cases} \gamma \geq 0 \\ 3-\gamma > 1. \end{cases}$$
Quindi $0 \leq \gamma < 2$.

Se invece $\gamma < 0$ allora $\sin\frac{1}{n^\gamma}$ non è positiva per ogni $n \geq 1$. Quindi non possiamo utilizzare i criteri di convergenza per serie a termini positivi. Possiamo procedere determinando per quali valori di $\gamma <$ si ha convergenza assoluta. In particolare la serie assegnata saràssolutamente convergente se converge
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin\frac{1}{n^\gamma} \mid .$$
Ora possiamo applicare il criterio del confronto per serie numeriche positive. In particolare
$$\mid \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin\frac{1}{n^\gamma} \mid \leq \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2},$$
perché $\mid \sin\frac{1}{n^\gamma} \mid \leq 1$.

A questo punto possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico. Infatti
$$\frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sim \frac{1}{n^{3-2\gamma}}.$$
Pertanto la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2}$$
convergerà se
$$\begin{cases} \gamma < 0 \\ 3-2\gamma > 1. \end{cases}$$
Ovvero
$$\begin{cases} \gamma < 0 \\ \gamma < 1. \end{cases}$$
Pertanto avremo convergenza per $\gamma < 0$. Quindi per ogni $\gamma < 0$ la serie è assolutamente convergente. Quindi la serie è assolutamente convergente per ogni $\gamma < 2$ (in particolare sarà anche semplicemente convergente).

In questo caso per $0 \le \gamma < 2$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin \frac{1}{n^\gamma}$$

è a termini positivi e convergente (quindi assolutamente convergente).

Posto $c(\gamma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin \frac{1}{n^\gamma}$ la somma della serie (il limite della successione delle somme parziali) abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c(\gamma)} \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin \frac{1}{n^\gamma} = 1.$$

In particolare se $0 \le \gamma < 2$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{c(\gamma)} \frac{x^{2\gamma}+5}{x^3+2} \sin \frac{1}{x^\gamma}, & x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0, \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{0\}. \end{cases}$$

è una funzione di densità di probabilità.

**Esercizio 2**

Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha + 2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha + 2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$$

è sempre a termini positivi perché $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \le 1$ per ogni numero naturale maggiore o uguale di 1 e dunque $\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ge 0$.

Possiamo allora usare i criteri di convergenza delle serie a termini positivi. In particolare distinguiamo tre casi.

(i) Supponiamo $\alpha > 0$. Allora

$$\frac{n^\alpha + 2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}} \sim \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}} \to +\infty.$$

Poiché per $\alpha \ge \frac{1}{2}$ il termine $n-$esimo non tende a 0 la serie non potrà convergere. Invece, se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, la serie ha termine $n-$esimo asintotico ad una serie armonica generalizzata di esponente $\frac{1}{2} - \alpha$. Tale serie non è convergente perché $\frac{1}{2} - \alpha < 1$ per $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ (cioè il caso che stiamo trattando).

(ii) $\alpha = 0$. Allora

$$\frac{n^\alpha + 2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}} = \frac{1 + 2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \to +\infty.$$

La serie non sarà convergente perché il comportamento asintotico è lo stesso della serie armonica generalizzata di esponente $\frac{1}{2}$ e la serie armonica genralizzata di esponente $\frac{1}{2}$ non converge.

(iii) $\alpha < 0$.

Allora abbiamo due sottocasi, $\frac{1}{3} \le -\alpha < 0$ oppure $-\alpha < \frac{1}{3}$.

(iiia) Se $\frac{1}{3} \le -\alpha < 0$ allora

$$\frac{n^\alpha + 2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}} \sim \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}}$$

perché per la formula di Taylor abbiamo $2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$ per $n \to +\infty$ e

$$n^{\alpha} + 2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim n^{\alpha},$$

per $n \to +\infty$. Quindi, abbiamo il termine $n-$esimo $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$, cioè il termine $n-$esimo di una serie armonica generalizzata di esponente $\frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} + \mid \alpha \mid$ . Poiché siamo nel caso $\frac{1}{3} \leq -\alpha < 0$ allora $\frac{1}{2} + \mid \alpha \mid \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, cioè sarà sempre strettamente minore di 1. Pertanto se $\frac{1}{3} \leq -\alpha < 0$ la serie non converge.

(iiib) Se $-\alpha < \frac{1}{3}$, allora (utilizzando sempre la formula di Taylor)

$$\frac{n^{\alpha} + 2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}} \sim \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n}}$$

perché in questo caso

$$n^{\alpha} + 2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{2}{\sqrt[3]{n}}.$$

Quindi il termine $n-$esimo della serie è asintoticamente equivalente aal termine $n-$esimo della serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}$$

che non converge perché $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$

Quindi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie considerata non converge.

**Esercizio 3**

Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^{\alpha} + \sqrt[3]{n}\arctan n^3}{\sin n^{\alpha} + 2 + n^3}$$

Verifichiamo prima di tutto se la serie è a termini positivi. La presenza a denominatore di $\sin n^{\alpha}$ non crea problemi, perché

$$\sin n^{\alpha} + 2 \geq 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Possiamo allora utilizzare il criterio del confronto asintotico, ricordando che

$$\lim_{n\to\infty} \arctan n^3 = \frac{\pi}{2},$$

abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^{\alpha} + \sqrt[3]{n}\arctan n^3}{\sin n^{\alpha} + 2 + n^3} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^{\alpha} + \frac{\pi}{2}\sqrt[3]{n}}{n^3},$$

per $n \to +\infty$.

Distinguiamo due casi.

(i) Se $\alpha > \frac{1}{3}$, allora per $n \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^{\alpha} + \frac{\pi}{2}\sqrt[3]{n}}{n^3} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^{\alpha}}{n^3} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{3}-\alpha+3}}.$$

Pertanto la serie convergerà se

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \alpha + 3 > 1 \\ \alpha > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

ovvero se e solo se $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{7}{3}$

(ii) Se $\alpha \leq \frac{1}{3}$, allora per $n \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^\alpha + \sqrt[3]{n} \arctan n^3}{\sin n^\alpha + 2 + n^3} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^\alpha + \frac{\pi}{2} \sqrt[3]{n}}{n^3}.$$

D'altra parte nelle ipotesi di $\alpha \leq \frac{1}{3}$,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^\alpha + \frac{\pi}{2} \sqrt[3]{n}}{n^3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{\pi \sqrt[3]{n}}{n^3} = \frac{\pi}{n^3}.$$

Quindi il termine $n-$esimo è maggiorato dal termine $n-$esimo della serie armonica generalizzata di esponente 3. Poiché tale serie converge se ne deduce dal criterio del confronto che anche la nostra serie è convergente per ogni $\alpha \leq \frac{1}{3}$

Pertanto, dai due casi considerati, se ne deduce che la serie converge per ogni $\alpha < \frac{7}{3}$.

Si noti che la funzione di parametro $\alpha < \frac{7}{3}$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{c(\alpha)} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{x^\alpha + \sqrt[3]{x} \arctan x^3}{\sin x^\alpha + 2 + x^3}, & x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0, \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{0\}. \end{cases}$$

è una funzione di densità di probabilità avendo posto $c(\alpha)$ il numero reale positivo definito come:

$$c(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{n^\alpha + \sqrt[3]{n} \arctan n^3}{\sin n^\alpha + 2 + n^3}.$$

**Esercizio 4**

Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(3n^2\right)}{n^\alpha + 3n^4}.$$

La serie in oggetto non ha è a termini positivi. Quindi non possiamo applicare i criteri di convergenza per le serie a termini positivi.

Studiamo direttamente la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(3n^2\right)}{n^\alpha + 3n^4}.$$

Quindi

$$\mid \frac{\sin\left(3n^2\right)}{n^\alpha + 3n^4} \mid \leq \frac{1}{n^\alpha + 3n^4} \leq \frac{1}{3n^4}.$$

Per il criterio del confronto concludiamo, ricordando che la serie armonica generalizzata converge per esponenti maggiori di 1, che la serie studiata è assolutamente convergente per ogni $\alpha > 0$.

**Esercizio 5**

Calcolare la somma della serie dopo aver determinato i valori in C per cui converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\mid z \mid^{n-2}}{\mid \mathrm{Re}(z) + i \mid^3}.$$

si tratta di una serie riconducibile ad una serie geometrica. Infatti per ogni $z \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\mid z \mid^{n-2}}{\mid \mathrm{Re}(z) + i \mid^3} = \frac{1}{\mid z \mid^2 \mid \mathrm{Re}(z) + i \mid^3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \mid z \mid^n .$$

D'altra parte, per ogni $z \in \mathbb{C}$ such that $\mid z \mid < 1$ abbiamo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \mid z \mid^n = \frac{\mid z \mid}{(1- \mid z \mid)^2}.$$

Quindi per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\mid z \mid < 1$ abbiamo convergenza assoluta della serie.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\mid z \mid^{n-2}}{\mid \mathrm{Re}(z) + i \mid^3} = \frac{1}{\mid z \mid^2 \mid \mathrm{Re}(z) + i \mid^3} \frac{\mid z \mid}{(1- \mid z \mid)^2} = \frac{1}{\mid z \mid\mid \mathrm{Re}(z) + i \mid^3 (1- \mid z \mid)^2}.$$

**Esercizio 6**

Non possiamo definire una densità di probabilità perché per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie non converge. Vedi esercizio 2.

**Esercizio 7**

Per quali valori del parametro $\alpha > 0$, se esistono, i termini della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c(\alpha) \frac{n^\alpha}{\sqrt{n} + n^{2\alpha}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

determinano una densità di probabilità, per una opportuna scelta della costante $c(\alpha)$.

In particolare si chiede di indicare, se esiste, che valore deve avere la costante $c(\alpha)$ e com'è definita la densità di probabilità così determinata.

Si tratta di una serie a termini positivi perché come abbiamo gi\`a provato in alcuni esercizi precedenti $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ per ogni $n \geq 1$.

Inoltre per il criterio del confronto asintotico delle serie a termini positivi abbiamo che

$$c(\alpha) \frac{n^\alpha}{\sqrt{n} + n^{2\alpha}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim c(\alpha) \frac{n^\alpha}{\sqrt{n} + n^{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Si presentano due casi $2\alpha < \frac{1}{2}$ oppure $2\alpha \geq \frac{1}{2}$.

(i) Se $2\alpha < \frac{1}{2}$, allora

$$c(\alpha) \frac{n^\alpha}{\sqrt{n} + n^{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim c(\alpha) \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim c(\alpha) \frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

per $n \to +\infty$.

Essendoci ridotti ad esaminare il termine $n-$esimo di una serie armonica generalizzata, abbiamo convergenza se e solo se

$$\begin{cases} 1 - \alpha > 1 \\ 2\alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il sistema ha soluzione per $\alpha < 0$.

(ii) Se $2\alpha > \frac{1}{2}$ allora

$$c(\alpha) \frac{n^\alpha}{\sqrt{n} + n^{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim c(\alpha) \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$c(\alpha) \frac{n^\alpha}{\sqrt{n} + n^{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim c(\alpha) \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mentre se $2\alpha = \frac{1}{2}$, allora

$$c(\alpha) \frac{n^\alpha}{\sqrt{n} + n^{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim c(\alpha) \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha}} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

In ogni caso, essendoci ridotti ad esaminare il termine $n-$esimo di una serie armonica generalizzata, abbiamo convergenza se e solo se

$$\begin{cases} \alpha + \frac{1}{2} > 1 \\ 2\alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il sistema ha soluzione per $\alpha > \frac{1}{2}$.

Pertanto la serie converge se e solo se $\alpha \in ]-\infty, 0[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$.

In particolare per ogni $\alpha \in ]-\infty, 0[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$ possiamo definire la funzione la densità di probabilità:

$$p(x) = \begin{cases} c(\alpha)\frac{x^\alpha}{\sqrt{x}+x^{2\alpha}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{0\}, \end{cases}$$

dove

$$c(\alpha) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}+n^{2\alpha}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$