Soluzioni

#1 $\Omega = D_{10,3}$, supponendo di assegnare una legge di probabilità uniforme, si ha $P((1,2,3)) = \frac{1}{\# D_{10,3}} = \frac{(10-3)!}{10!} = \frac{7!}{10!} = \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{720}$.

#2 22^6 ; $12 \cdot \frac{21!}{15!}$;

$\downarrow$ $\downarrow$

$P_1 = \frac{1}{22^6}$ $P_2 = \frac{15!}{12 \cdot 21!}$

#3 (i) $5!$; (ii) $\frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; (iii) $\frac{8!}{2!2!}$; (iv) $\frac{8!}{2!2!2!}$

#4 $\frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$; $\frac{6!}{\left(\frac{9!}{3!}\right)} = \frac{6! \cdot 3!}{9!} = \frac{6}{7 \cdot 8 \cdot 9}$

#5 $\frac{13!}{6!\,2!\,5!}$

Soluzioni

\#6 In tutto abbiamo $27 \cdot 99$ libri. D'altra parte il fatto di non accedere allo scaffale 3 significa che non sarà possibile scegliere tra quei libri quindi la scelta avviene tra $26 \cdot 99$ libri. Quindi i 99 libri dello scaffale 3 sono come le palline rosse e i $26 \cdot 99$ rimanenti come le palline bianche. Abbiamo una distribuzione ipergeometrica del tipo

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{99}{0}\binom{26\cdot 99}{15}}{\binom{27\cdot 99}{15}} = \frac{\frac{99!}{99!} \cdot \frac{(26\cdot 99)!}{15!(26\cdot 99-15)!}}{\frac{(27\cdot 99)!}{15!(27\cdot 99-15)!}}$$

$$= \frac{(26\cdot 99)!}{\cancel{15!}\,2559!} \cdot \frac{\cancel{15!}\,2658!}{2673!} = \frac{2574!}{2559!} \cdot \frac{2658!}{2673!}$$

$$= \frac{2560 \cdot 2561 \cdots 2574}{2659 \cdot 2660 \cdots 2673} = \frac{2560}{2659} \cdot \frac{2561}{2660} \cdot \frac{2562}{2661} \cdot \frac{2563}{2662} \cdot \frac{2564}{2663} \cdot \frac{2565}{2664} \cdot \frac{2566}{2665} \cdot \frac{2567}{2666} \cdot \frac{2568}{2667} \cdot \frac{2569}{2668} \cdot \frac{2570}{2669} \cdot \frac{2571}{2670} \cdot \frac{2572}{2671} \cdot \frac{2573}{2672} \cdot \frac{2574}{2673} \simeq 0{,}5668$$

Se invece si suppone che vi sia un rimpiazzo allora. Se invece si suppone che vi sia un rimpiazzo allora ... agli scaffali diversi dal 3.

$p = \left(1 - \frac{1}{27}\right)$ è la probabilità di accedere agli scaffali diversi dal

3.

Quindi $\binom{15}{0}\left(1-\frac{1}{27}\right)^{15} = \left(1-\frac{1}{27}\right)^{15} = \left(\frac{26}{27}\right)^{15} \sim 0{,}567$

\#7

$p = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15} \simeq 0{,}933$ dunque $n = 555$ e $p = 0{,}933$ le prob. di successo con $B(555, 0{,}933)$

$$\mathbb{P}(X \geq 502) = \sum_{k=502}^{555} \binom{555}{k} 0{,}933^k \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{555-k}$$

X indica il numero di successi nelle presenze.

#8 soluzione

Uova $p = \frac{15}{1000} = 0{,}015$

X v.a. che indica i successi (la sorpresa con diamante)

su 16 prove $P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{16} \binom{16}{k} 0{,}015^{k} \cdot 0{,}985^{16-k}$

$$= 1 - P(X<1) = 1 - \binom{16}{0} 0{,}985^{16}$$

$$= 1 - 0{,}985^{16}$$

$$\simeq 0{,}21$$

#9

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{\binom{7}{0}\binom{4}{5-0} + \binom{7}{1}\binom{4}{5-1} + \binom{7}{2}\binom{4}{5-2}}{\binom{11}{5}}$$

10# Se i numeri sono $\{1, \dots, 30\}$ allora supponendo che non vi sia rimpiazzo

$\Omega = C_{30,10}$ (insieme delle disposizione di 10 elementi su 30)

(i) $$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{15}{10}}{\binom{30}{10}} = \frac{15!}{\cancel{10!}\,5!} \cdot \frac{\cancel{10!}\,20!}{30!} \simeq 9{,}995 \cdot 10^{-5}$$

infatti $\#A = \binom{15}{10}$ sono le combinazioni di 10 numeri dispari tra 1 e 30

(ii) $$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\binom{10}{5}\binom{20}{5}}{\binom{30}{10}} = \frac{10!}{5!\,5!} \, \frac{20!}{5!\,15!} \cdot \frac{10!\,20!}{30!} \simeq 1{,}3 \cdot 10^{-1}$$

Si noti che 10 sono i numeri divisibili per tre, da 1 a 30, quindi $\#B = \binom{10}{5}\binom{20}{5}$.

(iii) $$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{\binom{3}{1}\binom{12}{4}\binom{15}{5}}{\binom{30}{10}} = 3 \cdot \frac{12!}{4!\,8!} \cdot \frac{15!}{5!\,\cancel{10!}} \, \frac{\cancel{10!}\,20!}{30!} \simeq 0{,}1484$$

poiché è indicato esattamente 1 solo numero divisibile per 10 allora dai 15-1 numeri pari dobbiamo sottrarre anche gli altri due numeri divisibili per 10.

11# Sia $l = k-1$. Allora il numero x_{k+1} potrà trovarsi in $k+1$ posti diversi di cui solo uno è quello che soddisfa $x_{(k-1)} < x_{k+1} < x_{(k)}$. Per cui
diversi di cui uno solo si trova nella posizione corretta.

$$\mathbb{P}\left(\{x_{(k-1)} < x_k < x_{(k)}\}\right) = \frac{1}{k+1}$$

D'altra parte il ragionamento si ripete per $l = 1, \dots, k-1, k$.