#1 La funzione p è positiva nel dominio di definizione. Inoltre il suo supporto è contenuto in $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Quindi p sarà una densità di probabilità su $\mathbb{N}\cup\{0\}$ se

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = c\sum_{k=0}^{\infty} k^{9-\alpha}\sin\frac{1}{k^{\alpha}+9}$$ converge.

In tal caso $c = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} k^{9-\alpha}\sin\frac{1}{k^{\alpha}+9}}$.

Poiché $k^{9-\alpha}\sin\frac{1}{k^{\alpha}+9} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^{9-\alpha}}{k^{\alpha}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^{2\alpha-9}}$, avremo che

la serie converge se e solo se $2\alpha-9>1 \iff \alpha>5$.

#2 Sia $X:\Omega\to\mathbb{R}$ una v.a. su $(\Omega,\mathcal{A},P)$ spazio di probabilità. Chiameremo funzione di ripartizione associata a X la funzione $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$, $F_X(t)=P(X\leq t)$.
Inoltre se esiste $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ localmente Riemann integrabile t.c. per ogni $t\in\mathbb{R}$:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$$

diremo che f è una densità di probabilità per X.

#3 Sia $(\Omega,\mathcal{A},P)$ uno spazio di probabilità; la funzione $P:\mathcal{A}\to[0,1]$ gode delle seguenti proprietà

(a) $P(\Omega)=1$

(b) per ogni $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$, se per ogni $i,j\in\mathbb{N}$ $i\neq j$ $A_i\cap A_j=\emptyset$, allora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

#4 La densità di X è $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ per ipotesi.

La v.a. $Z = e^{5X}$ ha funzione di ripartizione definita come

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(e^{5X} \leq t),$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare se $t<0$, $F_Z(t) = 0$; mentre se $t>0$ $F_Z(t) = P(e^{5X} \leq t) = P(X \leq \frac{1}{5} \log t)$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{5}\log t} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{5}\log t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Quindi per ogni $t>0$, F_Z è derivabile e

$$F_Z'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\log^2 t}{50}} \cdot \frac{1}{5t}.$$

Pertanto la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{5\sqrt{2\pi}\, t} e^{-\frac{\log^2 t}{50}}, & \text{se } t>0 \end{cases}$$

è una densità per Z.

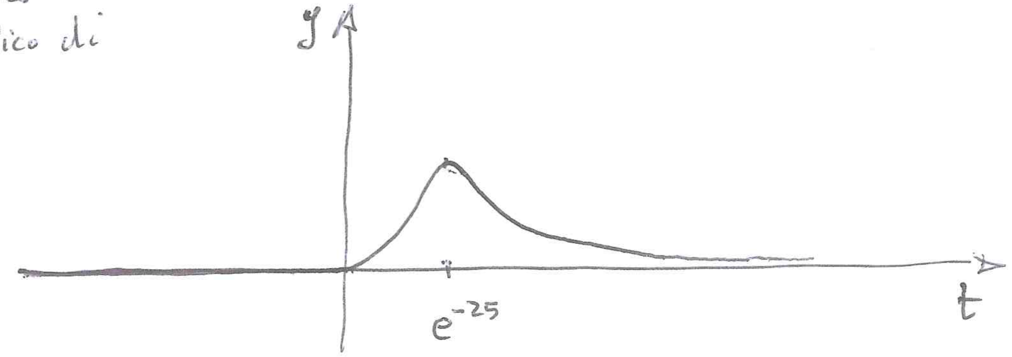
La funzione g è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché per $t>0$ è prodotto e composizione di funzioni continue, inoltre per ogni $t<0$ è la funzione costante identicamente nulla e quindi è continua. Inoltre è continua anche in 0 perché $\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{s\to -\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}\, e^s} \cdot e^{-\frac{s^2}{50}} = \lim_{s\to-\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{50}-s}$

$= \lim_{s\to-\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{50}} = 0$, perché $-\frac{s^2}{50} - s \sim -\frac{s^2}{50}$ per $s\to-\infty$.

Pertanto $g \in C(\mathbb{R})$. Per ogni $t>0$

$$g'(t) = -\frac{1}{5\sqrt{2\pi}\, t^2} e^{-\frac{\log^2 t}{50}} - \frac{2\log t}{250\, t^2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\log^2 t}{50}} = -\frac{1}{5t^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\log^2 t}{50}} \left(1 + \frac{2\log t}{50}\right)$$

e g è monotona strettamente crescente in $[0, e^{-25}]$, mentre è monotona strettamente decrescente in $[e^{-25}, +\infty[$. Infine $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$. Quindi e^{-25} è punto di massimo assoluto e il grafico di g è:



#5 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numerica in $\mathbb{R}$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, ma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non è assolutamente convergente allora per ogni $\eta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ esiste $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \mathbb{N}$ t.c.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \eta .$$

#6 $$\alpha\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{19}\right) = 1 \iff$$

$$\alpha\left(\frac{19\cdot17\cdot13\cdot9 + 25\cdot19\cdot17\cdot13 + 25\cdot19\cdot13\cdot9 + 5\cdot19\cdot17\cdot13\cdot9 + 25\cdot19\cdot17\cdot9 + 25\cdot17\cdot13\cdot9}{25\cdot19\cdot17\cdot13\cdot9}\right) =$$

$$\alpha \cdot \frac{509696}{944775} = 1 \iff \alpha = \frac{944775}{509696} \simeq 1{,}854 .$$

$$p_X(x) = \sum_{(x,y)\in A} p(x,y) = \begin{cases} p(x,2), & \text{se } x = 1 \\ p(x,2) + p(x,3), & x = 3 \\ p(x,1) + p(x,2) + p(x,3), & x = 4 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} p(1,2), & x = 1 \\ p(3,2) + p(3,4), & x = 3 \\ p(4,1) + p(4,2) + p(4,3) & x = \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \sum_{(x,y)\in A} p(x,y) = \begin{cases} p(4,y), & \text{se } y = 1 \\ p(4,y) + p(1,y) + p(3,y), & y = 2 \\ p(4,y) + p(3,y), & y = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} p(4,1) & y = 1 \\ p(4,2) + p(1,2) + p(3,2), & y = \\ p(4,3) + p(3,3), & y = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sono le densità marginali.

$$E[X] = 1 \cdot p(1,2) + 3\big(p(3,2) + p(3,4)\big) + 4\big(p(4,1) + p(4,2) + p(4,3)\big)$$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot p(1,2) + 9\big(p(3,2) + p(3,4)\big) + 16\big(p(4,1) + p(4,2) + p(4,3)\big)$$

Quindi $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ e $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

#7 Se X è una v.a. con densità uniforme nell'intervallo $[3,5]$ allora

$$f(x) = \frac{1}{2}\chi_{[3,5]}, \quad \text{dove } \chi_{[3,5]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [3,5] \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [3,5] \end{cases}$$

Pertanto $P(X \leq 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_3^4 1\,dx = \frac{1}{2}$. Inoltre

$$E[X] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\chi_{[3,5]}(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_3^5 t\,dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_3^5 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

$$E[X^2] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \chi_{[3,5]}(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{t=3}^{t=5} = \frac{1}{6}(125 - 27) = \frac{98}{6} = \frac{49}{3}$$

Quindi $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{49}{3} - 16 = \frac{1}{3}$

#8 Sia $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ uno spazio di probabilità. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che X è una variabile aleatoria se per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{Q}$.
In particolare se X è una v.a. e $\# X(\Omega) \leq \# \mathbb{N}$ diremo che X è una variabile aleatoria discreta.