Es. 1

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

Es. 2 Palline totali $17 = 8+9$. Quattro estrazioni senza rimpiazzo. Schema ipergeometrico. Se X è la v.a. che conta i successi relativa all'estrazione delle palline rosse abbiamo $0 \leq k \leq 4$

$$P(X=k) = \frac{\binom{8}{k}\binom{9}{4-k}}{\binom{17}{4}}.$$ Quindi dobbiamo calcolare

$$P(X \geq 2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{9}{2}}{\binom{17}{4}} + \frac{\binom{8}{3}\binom{9}{1}}{\binom{17}{4}} + \frac{\binom{8}{4}\binom{9}{0}}{\binom{17}{4}}$$

$$= \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{9!}{2!7!} \cdot \frac{4!\,13!}{17!} + \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{9!}{1!8!} \cdot \frac{4!\,13!}{17!} + \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!\,13!}{17!}$$

$$= \left(\frac{7 \cdot 8}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \cdot 9}{\cancel{2}} + \frac{6 \cdot 7 \cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{6}\,\cancel{2}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} + \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot \overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{24}} \right) \frac{4!}{14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}$$

$$= \left(7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 9 + 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 \cdot 2 \right) \frac{\overset{3}{\cancel{24}}}{14 \cdot \underset{5}{\cancel{15}} \cdot \underset{2}{\cancel{16}} \cdot 17}$$

$$= (1008 + 504 + 70) \cdot \frac{1}{14 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 17} = \frac{1582}{2380} = \frac{791}{1190}$$

$$\cong 0{,}6647.$$

Nel caso di rimpiazzo della pallina ad ogni estrazione abbiamo che la probabilità di estrarre una pallina rossa è pari a $\frac{8}{17}$. Quindi posto $p = \frac{8}{17}$ abbiamo una distribuzione di Bernoulli per una v.a. Y che conta i successi del tipo $B(4, \frac{8}{17})$. In particolare avremo

$$P(Y \geq 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{8}{17}\right)^2\left(\frac{9}{17}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{8}{17}\right)^3\left(\frac{9}{17}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{8}{17}\right)^4$$

$$= \frac{4!}{2!\,2!} \frac{8^2 \cdot 9^2}{17^4} + \frac{4!}{3!\,1!} \frac{8^3 \cdot 9}{17^4} + \frac{8^4}{17^4}$$

$$= \frac{6 \cdot 64 \cdot 81 + 4 \cdot 8^3 \cdot 9 + 8^4}{17^4} = \frac{64}{17^4}(6 \cdot 81 + 32 \cdot 9 + 64)$$

$$= \frac{64}{17^4}(486 + 288 + 64) = \frac{53632}{83521} \cong 0,6421$$

Es 3.

$$E[X] = \sum_{k=0}^{2} k\, P(X=k) = P(X=1) + 2P(X=2) = \binom{2}{1} \frac{1}{4} \frac{3}{4} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{16} + \frac{2}{4^2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

D'altra parte se X è una v.a. con densità $B(2, \frac{1}{4})$ allora

$E[X] = np$. Quindi $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = E[X]$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{k=0}^{2} k^2 P(X=k) - \frac{1}{4} = P(X=1) + 4P(X=2)$$

$$-\frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \frac{1}{4} = \frac{10-4}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

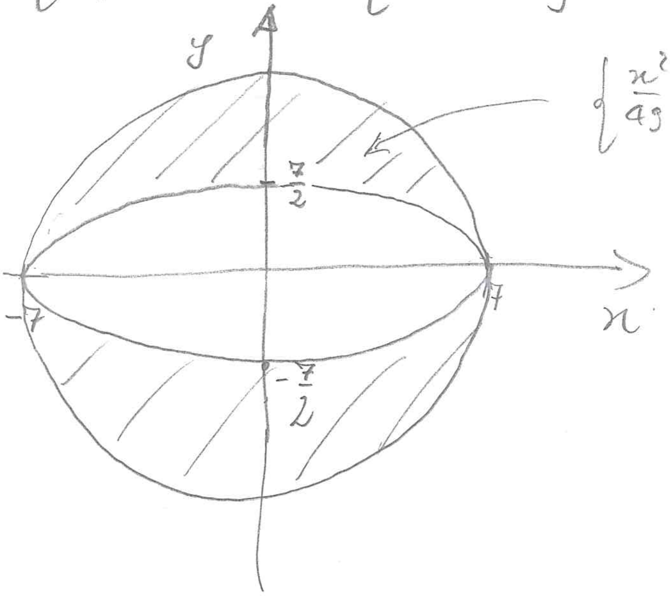
D'altra parte $Var(X) = np(1-p)$. Quindi $Var(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

Es 4. La densità uniforme su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 49\}$ è

$f = \frac{1}{49\pi} \chi_E$, dove χ_E è la funzione caratteristica su E.

$$P\left(\frac{X^2}{49} + 4\frac{Y^2}{49} \geq 1\right) = \iint_{\left\{\frac{x^2}{49} + \frac{4y^2}{49} \geq 1\right\}} \frac{1}{49\pi} \chi_E(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{49\pi} \iint\limits_{\left\{\frac{x^2}{49}+\frac{4y^2}{49} \geq 1\right\} \cap \left\{x^2+y^2 \leq 49\right\}} dx\,dy \quad = \frac{1}{49\pi}\left(\iint\limits_{\{x^2+y^2 \leq 49\}} dx\,dy - \iint\limits_{\left\{\frac{x^2}{49}+\frac{4y^2}{49} \geq 1\right\}} dx\,dy \right)$$



$$\left\{\frac{x^2}{49}+\frac{4y^2}{49} \geq 1\right\} \cap \left\{x^2+y^2 \leq 49\right\}$$

$$= \frac{1}{49\pi}\left(49\pi - 7 \cdot \frac{7}{2}\pi\right) = \frac{1}{49\pi} \frac{49\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo la densità marginale di X

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < -7 \\ \frac{1}{49\pi}\int_{-\sqrt{49-x^2}}^{\sqrt{49-x^2}} dx = \frac{2\sqrt{49-x^2}}{49\pi}, & \text{se} \quad -7 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{se} \quad x > 7 \end{cases}$$

mentre

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad y < -7 \\ \frac{2\sqrt{49-y^2}}{49\pi}, & \text{se} \quad -7 \leq y \leq 7 \\ 0, & \text{se} \quad y > 7 \end{cases}$$

Poiché $f_X(x)\cdot f_Y(y) = \dfrac{4\sqrt{49-x^2}\sqrt{49-y^2}}{49\pi} \neq \dfrac{1}{49\pi}$

per ogni $(x,y)\in B_\varepsilon(0,0) = \{x^2+y^2\le \varepsilon^2\}$ concludiamo che

X e Y non sono indipendenti.

Infine $\mathbb{P}(X+Y\le t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx\right)dz$

quindi la densità di X+Y è

$$z \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx .$$

Nel nostro caso abbiamo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{49\pi}\chi_E(x,z-x)\,dx$. Se $z\in[-7\sqrt2, 7\sqrt2]$ allora

↓ non richiesto

$$= \frac{1}{49\pi}\int_{\frac{z-\sqrt{88-z^2}}{2}}^{\frac{z+\sqrt{88-z^2}}{2}} dx = \frac{\sqrt{88-z^2}}{49\pi},$$

infatti $\chi_E(x,z-x) = 1 \iff x^2+(z-x)^2\le 49 \iff$

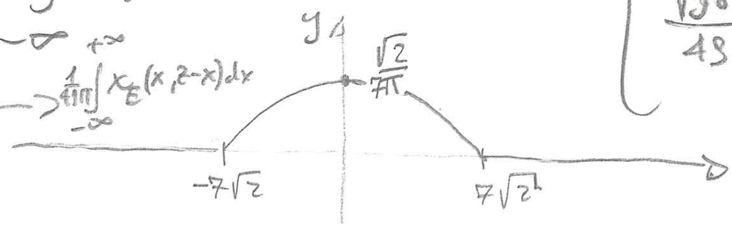
$2x^2-2zx+z^2\le 49 \iff 2x^2-2zx+z^2-49\le 0$ e se

$\frac{\Delta}{4} = z^2-2(z^2-49) = 98-z^2>0$ (cioè $z\in\,]-7\sqrt2, 7\sqrt2[$)

allora $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{49\pi}\chi_E(x,z-x)\,dx = \frac{\sqrt{98-z^2}}{49\pi}$. In particolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{49\pi}\chi_E(x,z-x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{se } z\in\mathbb{R}\setminus[-7\sqrt2, 7\sqrt2] \\ \dfrac{\sqrt{98-z^2}}{49\pi}, & z\in[-7\sqrt2, 7\sqrt2] \end{cases}$$

$z \longmapsto \frac{1}{49\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_E(x,z-x)\,dx$



Es 5 $\quad \#\{id: D \to C\} = 1$

$$P(\{id\}) = \frac{1}{\#\Omega}, \quad \text{dove } \Omega = \{f : \{1, \dots, 6\} \to \{1, \dots, 11\}\}$$

Cioè $P(\{id\}) = \frac{1}{11^6}$.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\{f : \{1, \dots, 6\} \to \{1, \dots, 11\},\ f \text{ iniettiva}\}}{11^6}$$

$$= \frac{\binom{11}{5}}{11^6} = \frac{11!}{5!\,6!}\,\frac{1}{11^6} \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11^6}.$$

Es 6 $\quad$ Dobbiamo risolvere $F(q) = \frac{1}{2}$ dove

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds \quad \text{e} \quad f(s) = \begin{cases} 4e^{-4s} & \text{se } s \geq 0 \\ 0 & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

se $t > 0$

$$F(t) = \left[-e^{-4s}\right]_{s=0}^{s=t} = 1 - e^{-4t}. \quad \text{Quindi}$$

$$1 - e^{-4t} = \frac{1}{2} \iff e^{-4t} = \frac{1}{2} \iff -4t = -\log 2$$

$$\iff t = \frac{\log 2}{4}.$$

Es 7 $\quad$ Teorema legge grandi numeri (vedi enunciato)

Es 8 $\quad$ Teorema limite centrale (vedi enunciato)

Es 9 $\quad$ Formula di Bayes (vedi definizione)