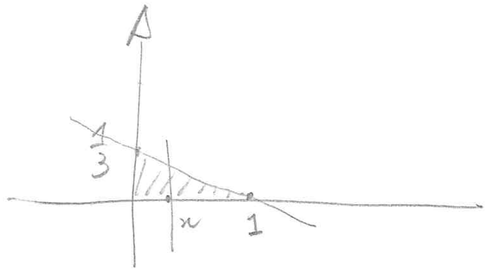


Sia $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x+3y\le 1 \ , x\ge 0, y\ge 0\}$

determinare c, in modo che la densità congiunta di (X,Y) sia uniforme su A.

$$c\iint_{\mathbb{R}^2}\chi_A\,dx\,dy=1\ ,\qquad c=\frac{1}{\iint_A dx\,dy}=\frac{1}{6}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{6} & \text{se } (x,y)\in A\\ 0 & \text{se } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus A\end{cases}$$

Determinare le densità marginali; se $0\le x\le 1$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{6}\chi_A(x,y)\,dy=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1-x}{3}}dy=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-x}{3}=\frac{1-x}{18}$$

$0\le y\le \frac{1}{3}$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{6}\chi_A(x,y)\,dx=\frac{1}{6}\int_0^{1-3y}dx=\frac{1-3y}{6}$$

Si noti che $f_X(x)\,f_Y(x)\ne\frac{1}{6}\chi_A=f(x,y)$

Calcoliamo $E[X]$ con X di densità $B(1,p)$. Cioè

$$P(X=0) = 1-p \quad e \quad P(X=1) = p.$$

Quindi $E[X] = \sum_{k=0}^{1} k P(X=k) = p.$

Calcoliamo $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_{k=0}^{1} k^2 P(X=k) - p^2$

$= p - p^2 = p(1-p)$.

Calcoliamo $E[X]$ con X di densità $B(n,p)$

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$ Allora

$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Il calcolo è un po' lungo tuttavia può essere fatto considerando che se $\{X_i\}_{1 \le i \le n}$ sono n v.a. indipendenti ciascuna di legge $B(1,p)$ allora $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim X$. Quindi

$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$. Inoltre $Var(X)$

$= Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$

<u>Teorema</u>. Se $X_1, \dots, X_m$ sono v.a. indip. e aventi legge $B(n_i, p)$ $i=1,\dots,m$. Allora $\sum_{i=1}^{m} X_i$ è $B(\sum_{i=1}^{m} n_i, p)$

/——/

Definizione di convergenza in legge

Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili reali e X una variabile reale. Per ogni $i\in\mathbb{N}$, $F_i(t)=\mathbb{P}(X_i\leq t)$, e $F(t)=\mathbb{P}(X\leq t)$ siano le rispettive funzioni di ripartizione. Diremo che $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge in legge a X se

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x)=F(x)$$

per ogni $x\in\mathbb{R}$ in cui F è continua.

In tal caso scriveremo $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

<u>Teorema</u>

$\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, X v.a. reali. Se $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ allora $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Esistono cioè succ. che convergono in legge, ma non in probabilità.

Teorema del limite centrale

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti e aventi la stessa legge di media μ e varianza $\sigma^2>0$.

Per ogni $n\in\mathbb{N}$ sia $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ la somma parziale n-esima. Allora per ogni $t\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le t\right)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds.$$

Il Teorema afferma che la successione

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge in legge ad una v.a. di densità $N(0,1)$

N.B.
$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\le t\right)=\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu+n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$=\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le\frac{t-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{-\infty}^{\frac{t-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

Si parla in tal caso di approssimazione normale

Media di una v.a. ipergeometrica. Cioè X v.a. che conta le palline rosse senza rimpiaz.

$$E[X] = \sum_k k\,P(X=k) = \sum_k k \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$$

Usiamo un metodo simile al precedente. Definiamo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ con X_i di densità $B\left(1, \frac{r}{b+r}\right)$

e $E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\,E[X_i] = n \cdot \frac{r}{b+r}$

e $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \frac{r}{b+r}\left(1 - \frac{r}{b+r}\right) = \frac{n r b}{(b+r)^2}$

Legge grandi numeri nell'applicazioni. Se non sappiamo che una certa moneta è equilibrata, possiamo effettuare n lanci per cui $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ con $E[X_i] = p$ e per il th. Legge Grandi Numeri $\bar{X}_n \longrightarrow p$

Però facendo un numero finito di lanci occorre stimare l'errore. $P(|\bar{X}_n - p| > \eta) = 1 - P(|\bar{X}_n - p| \leq \eta)$

Quindi $P(p - \eta \leq X_n \leq p + \eta)$. Si noti che

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$. Quindi

$|\bar{X}_n - p| \leq \eta$, $\left(\sqrt{n}\,\frac{|\bar{X}_n - \mu|}{\sigma} \leq \frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right)$ quindi $P\left(-\frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq \frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right)$

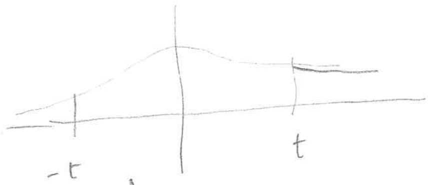
$$P(|\bar{X}_n - p| \leq \eta) = P\left(\left|\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}\right| \leq \frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right) = P\left(-\frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq \frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$= P\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq \frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right) - P\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq -\frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

$$\sim \Phi\left(\frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-\frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 2\Phi\left(\frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right) - 1$$

Infatti per $\Phi(-t) = P(X \leq -t) = P(-X \leq -t)$

$$= P(X \geq t) = 1 - P(X \leq t) \overset{\text{pari}}{=} 1 - \Phi(t)$$



Quindi $P(|\bar{X}_n - \mu| > \eta) \sim 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\eta}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right)$

Applicazione