Esercizio $q \in (0,1)$

Sia $p(x) = \begin{cases} c\,q^{x}, & x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$; $c \geq 0$.

Determinare il valore di c affinché per q fissato p sia una densità di probabilità su $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Determinare poi $E[X]$, $Var(X)$ e σ per una v.a. X con densità p.

Esercizio

Sia $p(x) = \begin{cases} c\,\dfrac{x^2 + x^{\alpha}}{x^{2\alpha} + x^3}, & x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \end{cases}$, $\alpha > 0$ e $c > 0$.

Determinare per quali valori di α la funzione p è una densità di probabilità su $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Determinare poi il valore di c. (senza calcolo esplicito). Determinare poi per quali α la speranza matematica di una v.a. di densità p è finita.

Esercizio

Sia X v.a. con densità uniforme su $[c,d]$. Calcolare una densità di $Z = \arctan(X)$.

Esercizio

Sia X v.a. con densità $N(0,1)$. Sia $Z = X^2 - 3X + 2$. Calcolare la densità di Z.

Esercizio

Determinare quali tra le seguenti serie è convergente

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + n}{5^n + 1}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{5^{n-1}}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n^3}{2 + n^4}$;

Esercizio Determinare la densità uniforme su $\{1,2,3,4,5,6\}^2$, calcolare le densità marginali p_X e p_Y. Ripetere il calcolo in $\{1,2,3,4,5,6\}^2 \setminus \{(k,k) : k = 1,2,3,4,5,6\}$.

Esercizio Sia $A = \{(1,2), (3,2), (2,1), (4,1), (4,3)\}$ e $p(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin A \\ \frac{c}{x+y^2}, & (x,y) \in A \end{cases}$ $c > 0$.

Determinare c affinché p sia una densità su A. Calcolare poi le densità marginali le speranze matematiche e le varianze di X e Y v.a. con (X,Y) di densità congiunta p. Verificare poi se $p_X(x) \cdot p_Y(y) = p(x,y)$.

Esercizio

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c q^k = 1 \to c = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} q^k} = 1-q$$

$$p(x) = \begin{cases} (1-q)q^x, & x \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N}\cup\{0\}) \end{cases}$$ è una densità

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \to \frac{q}{(1-q)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k q^k = \sum_{k=0}^{\infty} k q^k. \quad (*)$$

$$\frac{2}{(1-q)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} \to \frac{2q^2}{(1-q)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^k = \sum_{k=2}^{\infty} k^2 q^k - \sum_{k=2}^{\infty} k q^k$$

Quindi $\frac{2q^2}{(1-q)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k - \cancel{q} - \sum_{k=0}^{\infty} k q^k + \cancel{q}$, da cui ricordando (*)

Segue $\frac{2q^2}{(1-q)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k - \frac{q}{(1-q)^2}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k = \frac{2q^2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2}$,

cioè $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k = \frac{2q^2 + q(1-q)}{(1-q)^3} = \frac{q^2+q}{(1-q)^3} = q\,\frac{1+q}{(1-q)^3}$. (**)

Pertanto, poiché $\sum_{k=0}^{\infty} k\, p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-q)q^k < +\infty$ (criterio del rapporto)

$$E[X] = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} k q^k = (1-q)\cdot\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q}$$

Inoltre $E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-q) q^k$ (conv. per il crit. del rapporto)

$$= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k \underset{\substack{(**)\\ \text{vedi}}}{=} (1-q)\cdot q \cdot \frac{(1+q)}{(1-q)^3} = q\,\frac{1+q}{(1-q)^2}$$

Quindi $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = q\,\frac{1+q}{(1-q)^2} - \frac{q^2}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

e $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{1-q}$

Esercizio

Sia $\sum_{k=1}^{\infty} c \frac{k^2+k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3}$ — Per quali valori di $\alpha>0$

$$p(x)=\begin{cases} c\,\frac{x^2+x^\alpha}{x^{2\alpha}+x^3} & , x\in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ 0 & , x\in \mathbb{R}\setminus(\mathbb{N}\setminus\{0\}) \end{cases}$$ è una densità?

Determiniamo per quali α la serie converge

$$\frac{k^2+k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{k^2}{k^{2\alpha}+k^3} & \text{se } \alpha<2 \to \begin{cases} \frac{k^2}{k^{2\alpha}} \\ \frac{k^2}{k^3} \\ \frac{k^2}{2k^3} \end{cases} \\ \frac{2k^2}{k^4+k^3} & \alpha=2 \ (4) \\ \frac{k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3} & \alpha>2 \ (5) \end{cases}$$

(1) $\boxed{\begin{cases}\alpha<2\\ 2\alpha>3\end{cases}}$ (2) $\begin{cases}\alpha<2\\ 2\alpha<3\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\alpha<2\\ 2\alpha=3\end{cases}$.

(1) $\begin{cases}\alpha<2\\ \alpha>\frac{3}{2}\\ 2\alpha-2>1\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha<2\\ \alpha>\frac{3}{2}\end{cases}$ $\boxed{\frac{3}{2}<\alpha<2}$ & $\boxed{\alpha>\frac{3}{2}}$ Converge

(2) $\begin{cases}\alpha<2\\ \alpha<\frac{3}{2}\end{cases}$ $0<\alpha<\frac{3}{2}$ non conv.

(3) $\begin{cases}\alpha<2\\ \alpha=\frac{3}{2}\end{cases}$ non conv.

(4) $\longrightarrow \frac{2k^2}{k^4+k^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2k^2}{k^4}$ conv per. $\alpha=2$

(5) $\frac{k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3}$

$\frac{k^\alpha}{k^3}$ se $\begin{cases}\alpha>2\\ 3>2\alpha\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\alpha>2\\ \alpha<\frac{3}{2}\end{cases} \emptyset$

$\frac{k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^\alpha}{k^{2\alpha}} \begin{cases}\alpha>2\\ 3<2\alpha\\ \alpha>1\end{cases} \to \begin{cases}\alpha>\frac{3}{2}\\ \alpha>2\\ \alpha>1\end{cases}$ $\alpha>2$ conv.

Quindi se $\alpha > 3/2$ la serie converge

$$p(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3}} \cdot \dfrac{k^2+k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3}, & k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

è una densità. Per quali valori di α la speranza matematica è finita?

$\boxed{\alpha > \frac{3}{2}}$

$$c \sum_{k=1}^{\infty} k \, \frac{k^2+k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3} \stackrel{?}{=} E[X]$$

$$k \, \frac{k^2+k^\alpha}{k^{2\alpha}+k^3} \underset{k \to +\infty}{\sim} k \, \frac{k^2+k^\alpha}{k^{2\alpha}}$$

$$\sim \begin{cases} k \, \dfrac{k^2}{k^{2\alpha}}, & (a) \ \frac{3}{2} < \alpha < 2 \\ k \cdot \dfrac{2k^2}{k^{2\alpha}} = \dfrac{k^3}{k^4}, & (b) \ \alpha = 2 \\ k \, \dfrac{k^\alpha}{k^{2\alpha}}, & (c) \ \alpha > 2 \end{cases}$$

$$(a) : \frac{1}{k^{2\alpha-3}} \quad \begin{cases} \frac{3}{2} < \alpha < 2 \\ 2\alpha - 3 > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \emptyset \\ \alpha > 2 \end{cases}$$

Se $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ non ha speranza mat. finita.

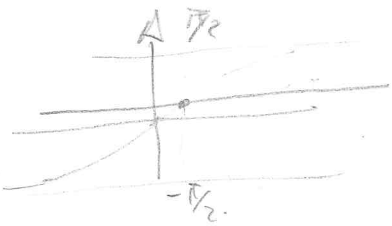
(b) Se $\alpha = 2$ non $\sum$ ha speranza mat. finita.

$$(c) \quad \frac{1}{k^{\alpha-1}} \longrightarrow \begin{cases} \alpha > 2 \\ \alpha - 1 > 1 \end{cases} \qquad \boxed{\alpha > 2}$$

Quindi, se $\alpha > 2$ ha speranza mat. finita.

Esercizio

X v.a. f densità uniforme su $[c,d]$



$Z = \arctan(X)$, Calcolare una densità per Z.

$$P(Z \le t) = P(\arctan(X) \le t)$$

Se $t \le -\frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$ $P(Z \le t) = 0$

Se $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ $\quad P(\arctan(X) \le t) = P(X \le tg\, t)$

Se $t \ge \frac{\pi}{2}$ $\quad P(\arctan(X) \le t) = 1$

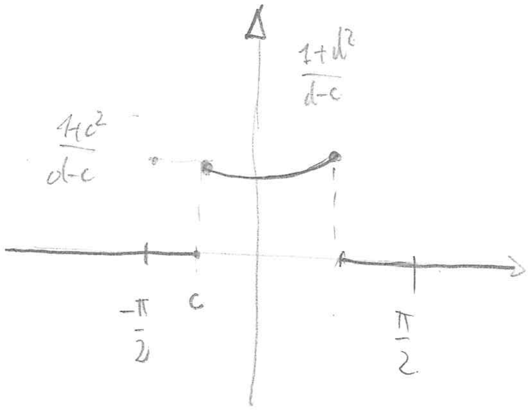
$$g(t) = \frac{d}{dt} P(Z \le t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{d}{dt} P(X \le tg\, t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{tg\, t} f(s)\,ds, & \text{se } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \\ f(tg(t)) \cdot (1 + tg^2(t)) \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le -\frac{\pi}{2} \\ \chi_{[c,d]}(tg(t))\,(1 + tg^2(t)); & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0, & t > \operatorname{arctg} \\ \frac{1 + tg^2(t)}{d-c}, & \text{se } \operatorname{arctg} c < t < \operatorname{arctg} \\ 0, & t \le \operatorname{arctg} \end{cases}$$

Quindi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(tg(t))\,(1 + tg^2(t))\,\chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(tg(t))\,(1 + tg^2(t))\,dt$$

$$\overset{tg}{=} \int_{-\infty}^{tg(x)} f(s)\,ds = P(X \le tg\, x)$$



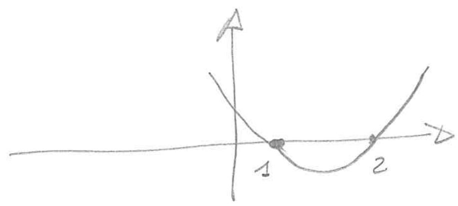
Esercizio

Sia X v.a. con densità $N(0,1)$.

Posto $Z = X^2 - 3X + 2$, calcolare la densità di Z.

Indichiamo con f la densità di X, $N(0,1)$ $\left(f(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)$

Disegniamo il grafico di x^2-3x+2.



Posto $G(t) = P(Z \le t) = P(X^2 - 3X + 2 \le t)$ si ha che

$x^2 - 3x + 2 - t \le 0$ ha soluzione se $\Delta = 9 - 4(2-t) \ge 0 \iff$

$9 - 8 + 4t \ge 0 \iff 4t \ge -1 \iff t \ge -\frac{1}{4}$.

In particolare se $t = -\frac{1}{4}$, $x^2 - 3x + 2 - t \le 0 \iff x = \frac{3}{2}$

Se $t > -\frac{1}{4}$, $x^2 - 3x + 2 - t \le 0 \iff \frac{3 - \sqrt{1+4t}}{2} \le x \le \frac{3 + \sqrt{1+4t}}{2}$

Se $t < -\frac{1}{4}$, $x^2 - 3x + 2 - t \le 0 \iff S = \phi$.

Quindi

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -\frac{1}{4} \\ P\left(\frac{3-\sqrt{1+4t}}{2} \le X \le \frac{3+\sqrt{1+4t}}{2} \right) & \text{se } t \ge -\frac{1}{4} \end{cases}$$

e
$$G'(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < -\frac{1}{4} \\ \frac{d}{dt} \int_{\frac{3-\sqrt{1+4t}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{1+4t}}{2}} f(s)\,ds, & \text{se } t \ge -\frac{1}{4} \end{cases}$$

In particolare
$$G'(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{3+\sqrt{1+4t}}{2}\right)(1+4t)^{-1/2} + f\left(\frac{3-\sqrt{1+4t}}{2}\right)(1+4t)^{-1/2} \end{cases}$$

cioè $$G'(t)=\begin{cases} 0 \ , & \text{se } t<-\frac{1}{4} \\ \left(e^{-\left(\frac{3+\sqrt{1+4t}}{2}\right)^2\frac{1}{2}}+e^{-\left(\frac{3-\sqrt{1+4t}}{2}\right)^2\frac{1}{2}}\right)\frac{(1+4t)^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \ , & t\geq - \end{cases}$$

Esercizio

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$. Serie a termini positivi. Applicando il crit. del rapporto si ha $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0$

Quindi converge. □

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n+n}{5^n+1}$. Serie a termini positivi. Il comportamento asintotico è

$\frac{e^n+n}{5^n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e^n}{5^n}$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{5}\right)^n$

è una serie geom. di ragione $\frac{e}{5}(<1)$. Quindi è convergente. Sarà allora convergente anche la serie assegnata per il criterio del cfr. asintotico. □

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot2^n}{5^{-1}\cdot5^n}=10\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=10\,\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=10\cdot\frac{5}{3}$$

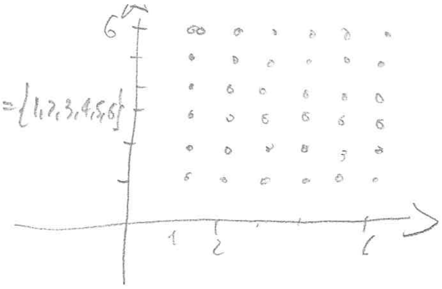
$=\frac{50}{3}$, perché la serie è riconducibile alla serie geometrica di ragione $\left(\frac{2}{5}\right)$ □

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n^3}{2+n^4}$. Serie a termini positivi. $\frac{n^2+n^3}{2+n^4}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$

non converge per il criterio del cfr. asintotico perché il termine n-esimo è quello della serie armonica.

□

Esempio $\quad p(x,y) = \frac{1}{36}$



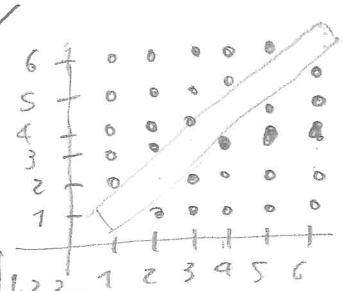
$$p_X(x) = \begin{cases} \sum_{(x,y)\in A} p(x,y) & : x \in Pr_X(A) = \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & : x \in R \setminus Pr_X(A) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{36} = \frac{1}{6} & , x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \sum_{(x,y)\in A} p(x,y) & : y \in Pr_Y(A) = \{1,2,\dots 6\} \\ 0 & y \in R \setminus Pr_Y(A) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6} & y \in Pr_Y(A) \\ 0 & y \in Pr_Y(A) \end{cases}$$

$$\boxed{p(x,y) = \frac{1}{36} = p_X(x) \cdot p_Y(y)}$$

Invece $\quad p(x,y) = \frac{1}{30}$

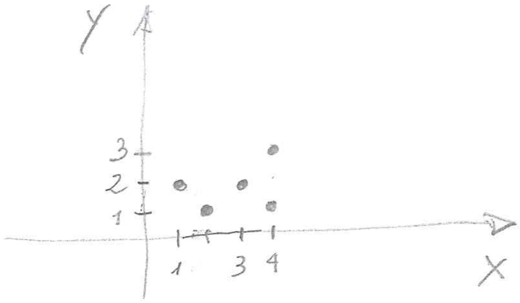


$$p_X(x) = \begin{cases} \sum_{(x,y)\in A} p(x,y) & : x \in Pr_X(A) = \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{altri.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{30} = \frac{1}{6} \\ 0 & x \in R \setminus Pr_X(A) \end{cases}$$

$p_Y(y) = \frac{1}{6}$ $\quad$ e $\quad p(x,y) = \frac{1}{30} \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$

$$A = \{(1,2), (3,2), (2,1), (4,1), (4,3)\}$$



$$X : \Omega \longrightarrow A$$

$$p(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \notin A \\ \dfrac{c}{x+y^2} & (x,y) \in A \end{cases}$$

$$\sum_{(x,y)\in A} p(x,y) = c\left(\frac{1}{1+4} + \frac{1}{3+4} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+9}\right) = c\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13}\right)$$

$$= c\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right) = \frac{c\,(2\cdot 13\cdot 7\cdot 3 + 13\cdot 7\cdot 5 + 13\cdot 5\cdot 3 + 3\cdot 5\cdot 7)}{13\cdot 7\cdot 5\cdot 3} = 1$$

$$c = \frac{13\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 13 + 5\cdot 7\cdot 13 + 3\cdot 5\cdot 13 + 3\cdot 5\cdot 7}$$

determinare la densità di probabilità marginale

$$p_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(x,y)\in A} p(x,y) & , \quad x \in Pr_X(A) = \{1,2,3,4\} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus Pr_X(A) \end{cases}$$

$$p_X(1) = \sum_{(1,y)\in A} p(x,y) = c \;\; p(1,2) = \frac{c}{5}$$

$$p_X(2) = \sum_{(2,y)\in A} p(2,y) = c \;\; p(2,1) = \frac{c}{3}$$

$$p_X(3) = \sum_{(3,y)\in A} p(3,y) = c \;\; p(3,2) = \frac{c}{7}$$

$$p_X(4) = \sum_{(4,y)\in A} p(4,y) = c\left(p(4,1) + p(4,3)\right) = c\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13}\right) = c\,\frac{13+5}{5\cdot 13} = c\,\frac{18}{5\cdot 13}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \sum\limits_{(x,y)\in A} p(x,y) & , \text{ se } y \in \{1,2,3\} \\ 0 & y \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\} \end{cases}$$

$$p_Y(1) = \sum_{(x,1)} p(x,1) = c\, p(2,1) = \frac{c}{5}$$

$$p_Y(2) = \sum_{(x,2)} p(x,2) = c\left(p(1,2) + p(3,2)\right) = c\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = c\,\frac{7+5}{35} = c\,\frac{1}{3}$$

$$p_Y(3) = \sum_{(x,3)} p(x,3) = c \quad p(4,3) = \frac{c}{13}$$

$$E[X] = \sum_{x \in Pr_X(A)} x\, p_X(x) = 1 \cdot p_X(1) + 2\, p_X(2) + 3\, p_X(3) + 4\, p_X(4)$$

$$= c\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{7} + 4 \cdot \frac{18}{5 \cdot 13}\right) = c\, \frac{3\cdot 7\cdot 13 + 2\cdot 5\cdot 7\cdot 13}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}$$

$$+ \frac{3\cdot 3\cdot 7\cdot 13 + 4\cdot 18\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}$$

$$E[Y] = \sum_{y \in Pr_Y(A)} y\, p_X(y) = 1 \cdot p_Y(1) + 2\, p_Y(2) + 3\, p_Y(3) = c\left(\frac{1}{5} + \frac{2\cdot 13}{35} + \frac{3}{13}\right)$$

$$= c\, \frac{7\cdot 13 + 2\cdot 13^2 + 3\cdot 35}{35 \cdot 13}$$

$$E[X+Y] = \sum_{(x,y)\in A} (x+y)\, p(x,y) = E[X] + E[Y]$$

Verificare se $p_X(x)\, p_Y(y) = p(x,y)$: $p_X(1) \cdot p_Y(2) = \frac{c^2}{5^2}$

$p(1,2) \neq \frac{c}{5}$ NO

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \sum x^2 p_X(x) - E[X]^2 =$$

$$= c\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{7} + 16 \cdot \frac{18}{5 \cdot 13}\right) - E[X]^2$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \sum y^2 p_Y(y) - E[Y]^2$$

$$= c\left(1 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{12}{35} + 9 \cdot \frac{1}{13}\right) - E[Y]^2$$