1

Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3n^{\frac{2}{n}-1}+4\sqrt[n]{n^2}\right)^n\left(e^{4n}-n^{300}\right)}{4^n n^2\left(e^{4(n-3)}+n^{302}\right)} = e^{\frac{51}{4}}.$$ Infatti:

$$\frac{\left(3n^{\frac{2}{n}-1}+4\sqrt[n]{n^2}\right)^n\left(e^{4n}-n^{300}\right)}{4^n n^2\left(e^{4n-12}+n^{302}\right)} \sim \frac{4^n n^2\left(\frac{3}{4n}+1\right)^n e^{4n}}{4^n n^2\, e^{4n-12}} \sim e^{12}\left(1+\frac{3}{4n}\right)^n,$$

ma $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{4n}\right)^n = e^{\frac{3}{4}}$, perché $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Quindi $\lim_{n\to+\infty} e^{12}\left(1+\frac{3}{4n}\right)^n = e^{\frac{51}{4}}$.

2

$f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{4-x^2}}, & \text{se } 0\le x<2 \\ (x-2)^2(\sin(2x)+\cos^3 x), & \text{se } x\ge 2\end{cases}$

(1) Se $x\in[0,2[$, $f(x)=e^{-\frac{1}{4-x^2}}$. Quindi f è continua $[0,2[$, perché composizione di funzioni continue. Analogamente se $x\in]2,+\infty[$, allora $f(x)=(x-2)^2(\sin(2x)+\cos^3 x)$. Quindi $f_{|]2,+\infty[}$ è continua su tale insieme perché prodotto di funzioni continue. Inoltre $f(x)=(x-2)^2(\sin(2x)+\cos^3 x)$ su $[2,+\infty[$, quindi $f_{|[2,+\infty[}$ è continua, in particolare $\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=0$. Rimane allora da verificare se esiste $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ per concludere che f è continua in 2. Calcoliamo $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} e^{-\frac{1}{4-x^2}} = \lim_{x\to 2^-} e^{-\frac{1}{(2-x)(2+x)}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{1}{t(4-t)}} = 0 = f(2).$$

per $2-x=t$

Pertanto f è continua anche in 0. Quindi $f \in C([0,+\infty[, \mathbb{R})$

(2) Se $x \in [0,+\infty[\setminus\{2\}$ f è derivabile perché composizione di funzioni derivabili per $0 \le x < 2$ e prodotto di funzioni derivabili per $x \ge 2$. In particolare per ogni $c \in [0,2[$

$$f'(c) = \left(f_{|[0,2[}\right)'(c) = -\frac{2c}{(4-c^2)^2}\, e^{-\frac{1}{4-c^2}},$$

mentre per ogni $c \in]2,+\infty[$

$$f'(c) = \left(f_{]2,+\infty[}\right)'(c) = 2(c-2)(\sin(2c)+\cos^3 c) + (c-2)^2(2\cos(2c) - 3\cos^2 c \sin c)$$

Inoltre

$$\left(f_{|[2,+\infty[}\right)'(2) = 0.$$

Se esiste $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \ell \in \mathbb{R}$ e $\ell = 0$, cioè coincide con $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$, allora f sarà derivabile anche in 2 e la sua derivata varrà 0 in 2.

Infatti

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{-\frac{1}{4-x^2}}}{x-2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} -\frac{e^{-\frac{1}{t(4-t)}}}{t} = \lim_{s\to+\infty} -s\, e^{-\frac{s}{4-\frac{1}{s}}} = 0.$$

$\left(\frac{1}{t} = s\right)$.

Quindi f è derivabile anche in 2 e la sua derivata è 0.

\# 3 $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{3x-4}}{(49x^2-784)\sin(x+4)} = -\frac{1}{2352\sin 8}$$

Consideriamo la funzione seguente per $x\neq 4$

$$\frac{\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{3x-4}}{(49x^2-784)} = \frac{x+4-3x+4}{(49x^2-784)\left(\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+\sqrt[3]{x+4}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{2(4-x)}{49(x-4)(x+4)\left(\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+\sqrt[3]{x+4}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)}$$

$$= -\frac{2}{49(x+4)\left(\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+\sqrt[3]{x+4}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)}$$

Allora

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{3x-4}}{(49x^2-784)\sin(x+4)} = \lim_{x\to 4} -\frac{2}{49(x+4)\left(\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^2+\sqrt[3]{x+4}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)\sin(x+4)}$$

$$= -\frac{1}{196(4+4+4)\sin 8} = -\frac{1}{2352\sin 8}$$

\#4

Calcolare in $\mathbb{C}$ le soluzioni di

$$\left(4z^2-(16-7i)z-28i\right)\left(z^5+4-7i\right)=0.$$

Risolviamo $4z^2-(16-7i)z-28i=0$

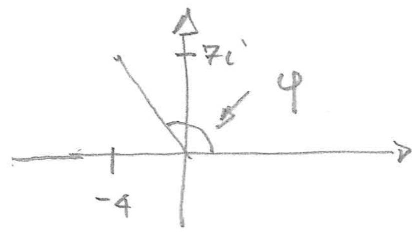
$$\Delta = (16-7i)^2+448i = 256-224i-49+448i = 256+224i-49$$
$$= (16+7i)^2.$$

Pertanto una radice di $v^2=\Delta$ è $16+7i$. Quindi

$$z_1 = \frac{16-\cancel{7i}+16+\cancel{7i}}{8} = \frac{32}{8} = 4\ ; \quad z_2 = \frac{\cancel{16}-7i-\cancel{16}-7i}{8} = -\frac{7}{4}i.$$

Risolviamo $z^5+4-7i=0$. Utilizzando la formula risolutiva delle equazioni pure di grado n abbiamo: $z^5=-4+7i$, cioè

$$z^5=\sqrt{65}\,e^{i\varphi}, \quad \text{dove } \varphi=-\arctan\frac{7}{4}+\pi$$



Quindi $w_k=(65)^{\frac{1}{10}}e^{i\theta_k}$, dove $\theta_k=\frac{\varphi+2k\pi}{5}$, $k=0,1,2,3,4$.

#5 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $h(x)=g(2\sin^3(7x))$ con $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e t.c. $g\left(\frac{3\pi}{28}\right)=9$, $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=10$, $g'\left(\frac{3\pi}{28}\right)=7$, $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2$.

Poiché g è derivabile per ipotesi e $x\mapsto 2\sin^3(7x)$ è derivabile, anche la funzione composta h è derivabile e

$$h'(x)=g'(2\sin^3(7x))\cdot 6\sin^2(7x)\cdot\cos(7x)\cdot 7$$
$$=42\,g'(2\sin^3(7x))\sin^2(7x)\cos(7x).$$

Quindi

$$h'\left(\frac{3\pi}{28}\right)=42g'\left(2\sin^3\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)\cdot\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right),\ \text{ma}$$

$\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, da cui si deduce

$$h'\left(\frac{3\pi}{28}\right)=42g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=42\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-21\sqrt{2},$$

perché $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2$

#6 Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione

$$\sqrt{x^2-4x} > -|x|-7x .$$

(a) Se $-|x|-7x<0$ e $x^2-4x\geq 0$ allora la disequazione è soddisfatta.

(b) Se $-|x|-7x\geq 0$ e $x^2-4x\geq 0$, allora la disequazione è soddisfatta se e solo se $x^2-4x>(|x|+7x)^2$.

Risolviamo (a) che si traduce nel sistema

$$(a)\ \begin{cases} -|x|-7x<0 \\ x^2-4x\geq 0 \end{cases}$$

e poi risolviamo (b) che si traduce nel sistema

$$(b)\ \begin{cases} -|x|-7x\geq 0 \\ x^2-4x>(|x|+7x)^2 . \end{cases}$$

L'unione delle soluzioni dei due sistemi (a) e (b) determinerà la soluzione della disequazione.

Caso (a)

$$\begin{cases} -|x|-7x<0 \\ x\in\,]-\infty,0]\cup[4,+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x\leq 0 \\ x-7x<0 \\ x\in\,]-\infty,0]\cup[4,+\infty[\end{cases} \vee \begin{cases} x>0 \\ -8x<0 \\ x\in\,]-\infty,0]\cup[4,+\infty[\end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x\leq 0 \\ -6x<0 \\ x\in\,]-\infty,0]\cup[4,+\infty[\end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ x\in\,]-\infty,0]\cup[4,+\infty[\end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\emptyset \qquad\qquad x\in[4,+\infty[$$

Pertanto il sistema (a) è soddisfatto soltanto se $x \in [4, +\infty[$.

Caso (b)

$$\begin{cases} -|x|-7x \geq 0 \\ x^2-4x > (|x|+7x)^2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{cases} x \geq 0 \\ -x-7x \geq 0 \\ x^2-4x > 64x^2 \end{cases}}_{(b1)} \vee \underbrace{\begin{cases} x < 0 \\ x-7x \geq 0 \\ x^2-4x > 36x^2 \end{cases}}_{(b2)} .$$

$$(b1) \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \\ -63x^2-4x > 0 \end{cases} \iff \phi ;$$

$$(b2) \iff \begin{cases} x < 0 \\ 35x^2+4x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \\ x \in]-\frac{4}{35}, 0[\end{cases} \iff x \in]-\frac{4}{35}, 0[.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono date dall'insieme

$$]-\frac{4}{35}, 0[\, \cup \, [4, +\infty[.$$

#7

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} -6x, & \text{se } x \leq 0 \\ e^{7x}-1, & \text{se } 0 < x \leq \frac{2}{\pi} \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x > \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

(a) + (d)

$h_{|]-\infty, 0]} = -6x$, quindi h è continua per ogni $x \in]-\infty, 0[$ ed inoltre $\lim_{x \to 0^-} h(x) = h(0)$, perché $-6x$ è continua;

$h_{|]0, \frac{2}{\pi}]} = e^{7x}-1$, quindi h è continua per ogni $x \in]0, \frac{2}{\pi}[$ e $\lim_{x \to \frac{2}{\pi}} h(x) = e^{\frac{14}{\pi}}-1 = h(\frac{2}{\pi})$, perché $e^{7x}-1$ è continua;

$h_{|]\frac{2}{\pi},+\infty[} = \sin\frac{1}{x}$, quindi h è continua per ogni $x \in]\frac{2}{\pi},+\infty[$ perché $\sin\frac{1}{x}$ è continua in $]0,+\infty[$.

Rimane da capire se h è continua anche in 0 e in $\frac{2}{\pi}$.

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^{7x}-1) = 0$, perché $e^{7x}-1_{|[0,+\infty[}$ è continua.

Pertanto $\exists \lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = 0$.

Invece $\lim_{x\to \frac{2}{\pi}^+} h(x) = \lim_{x\to\frac{2}{\pi}^+} \sin\frac{1}{x} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

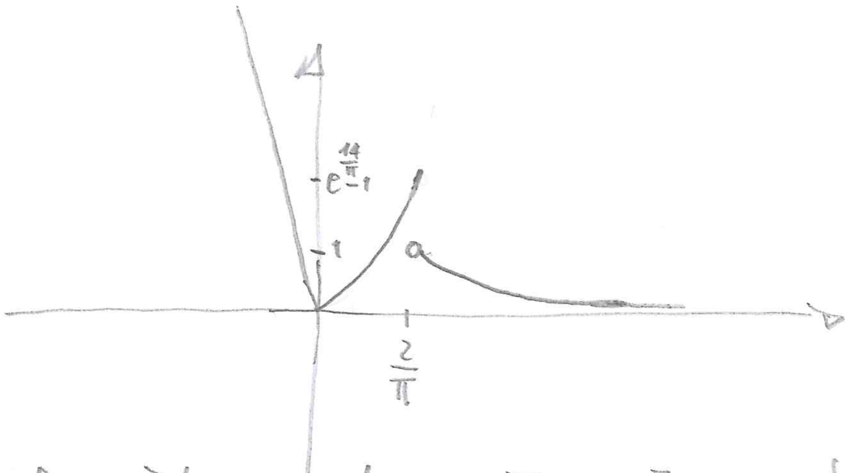
quindi non esiste $\lim_{x\to\frac{2}{\pi}} h$ e pertanto h non è continua in $\frac{2}{\pi}$ (infatti $h(\frac{2}{\pi}) = e^{\frac{14}{\pi}}-1 > e^{3}-1 > 1 = \lim_{x\to(\frac{2}{\pi})^+} h = 1$).

(b)

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$, mentre

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -6x = +\infty$.

(c) grafico



La funzione h è decrescente in $]-\infty,0]$, perché $h(x)_{|]-\infty,0[} = -6x$; h è crescente in $[0,\frac{2}{\pi}[$ perché

$h(x) = e^{7x} - 1$ in $[0, \frac{2}{\pi}]$ è crescente.

Infine $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ in $]\frac{2}{\pi}, +\infty[$ è decrescente, perché se $x \in]\frac{2}{\pi}, +\infty[$, allora $\frac{1}{x} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e, poiché $\frac{1}{x}$ è decrescente in $]\frac{2}{\pi}, +\infty[$ e $\sin :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ è crescente, risulterà che $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ è decrescente in $]\frac{2}{\pi}, +\infty[$ perché composizione tra una funzione decrescente e una crescente.