1#
$$\int_0^{7/3} \frac{x}{\sqrt{3x+7}}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{7/3} \frac{3x}{2\sqrt{3x+7}}\,dx = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{14}} \frac{t^2-7}{3}\,dt$$

$$\sqrt{3x+7} = t\ ;\quad dt = \frac{3}{2\sqrt{3x+7}}\,dx\ ;\quad 3x+7 = t^2 \longrightarrow x = \frac{t^2-7}{3}$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{7t}{3}\right]_{t=\sqrt{7}}^{t=\sqrt{14}} = \frac{2}{27}\left(14\sqrt{14} - 7\sqrt{14} - \cancel{7\sqrt{7}} + \cancel{7\sqrt{7}}\right) = \frac{14\sqrt{14}}{27}$$

2# $\alpha > 0$
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha} \sin x^3}{x^{\frac{4}{3}}+3}\,dx$$

$$\frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha} \sin x^3}{x^{\frac{4}{3}}+3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e\, x^{-\alpha} x^3}{3}.$$ Quindi $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha} \sin x^3}{x^{\frac{4}{3}}+3}\,dx$

converge se e solo se converge $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-3}}\,dx$ e ciò accade se e solo se (per $\alpha>0$) $\alpha - 3 < 1$, cioè per $\alpha < 4$.

D'altra parte $\frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha} \sin x^3}{x^{4/3}+3}$ non ha un segno definito per $x \to +\infty$. Pertanto studiamo la convergenza assoluta.

$$\left| \frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha} \sin x^3}{x^{4/3}+3} \right| \leq \frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha}}{x^{4/3}+3},\quad \text{perché } |\sin x^3| \leq 1.$$

Inoltre
$$\frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha}}{x^{4/3}+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\left(1 + \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{1}{x^\alpha}}{x^{4/3}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}+\alpha}}$$

Applicando il criterio del confronto asintotico risulta che $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha}}{x^{4/3}+3}\,dx$ converge se e solo se converge $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4/3+\alpha}}\,dx$ e ciò si verifica solo se $\frac{4}{3}+\alpha > 1$, cioè per ogni $\alpha > 0$ ($\alpha>0$ è l'intervallo a cui ci siamo ristretti)

Applicando il teorema del confronto deduciamo allora che

$$\int_1^{+\infty} \frac{|e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha} \sin(x^3)|}{x^{\frac{4}{3}}+3}\,dx \quad \text{converge per ogni } \alpha>0$$

e quindi anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha} \sin x^3}{x^{\frac{4}{3}}+3}\,dx$ sarà convergente

Concludiamo allora che (per $\alpha>0$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} x^{-\alpha} \sin(x^3)}{x^{\frac{4}{3}}+3}\,dx$$

converge se e solo se $\alpha<4$.

#3 $\quad f(x)=\dfrac{\sinh(\sqrt{|x^2-4|})}{\cosh(\sqrt{|x^2-4|})+3}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f è pari

$\forall x\in\mathbb{R}$ $-x\in\mathbb{R}$ e $f(x)=f(-x)$

Poiché f è quoziente di funzioni derivabili per $x\neq\pm 2$

f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

Inoltre per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

$$f'(x)=\frac{\cosh(\sqrt{|x^2-4|})\cdot\frac{\operatorname{sgn}(x^2-4)}{2\sqrt{|x^2-4|}}\cdot 2x\,\left(\cosh(\sqrt{|x^2-4|})+3\right)-\sinh^2(\sqrt{|x^2-4|})\frac{x\operatorname{sgn}(x^2-4)}{\sqrt{|x^2-4|}}}{\left(\cosh\sqrt{|x^2-4|}+3\right)^2}$$

Quindi

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{|x^2-4|}}\operatorname{sgn}(x^2-4)\left(\cosh^2(\sqrt{|x^2-4|})+3\cosh(\sqrt{|x^2-4|})-\sinh^2\sqrt{|x^2-4|}\right)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\end{cases}$$

ma $\cosh^2 t = 1+\sinh^2 t$ (identità fondamentale) quindi

$\cosh^2(\sqrt{|x^2-4|})+3\cosh(\sqrt{|x^2-4|})-\sinh^2(\sqrt{|x^2-4|})$

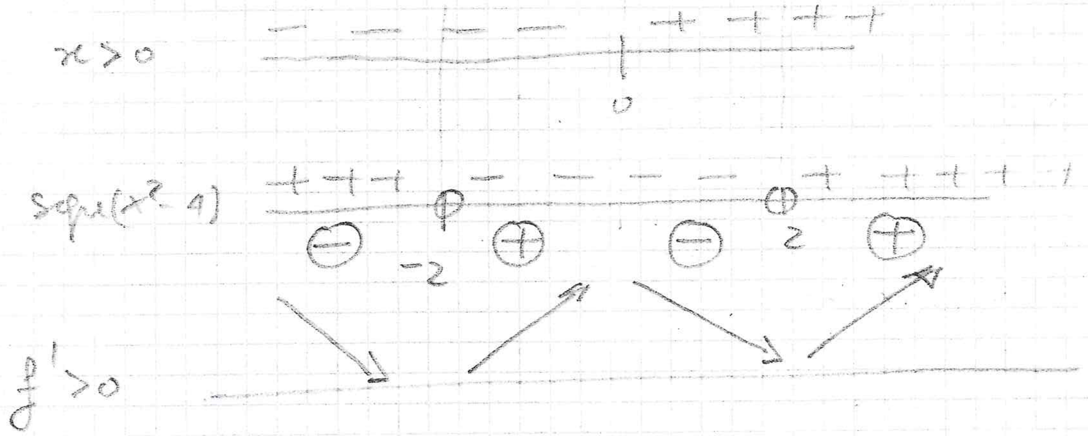
$=\cosh^2(\sqrt{|x^2-4|})+3\cosh(\sqrt{|x^2-4|})+1-\cosh^2(\sqrt{|x^2-4|})$

$=3\cosh(\sqrt{|x^2-4|})+1\geq 4$ perché $\cosh t\geq 1$ $\forall t\in\mathbb{R}$

Pertanto

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x\,\mathrm{sgn}(x^2-4)}{\sqrt{|x^2-4|}}>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\end{cases} \iff \begin{cases} x\,\mathrm{sgn}(x^2-4)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\end{cases}$$

(perché $\sqrt{|x^2-4|}>0$ per $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$)



Pertanto f è monotona strettamente decrescente in $]-\infty,-2]$ e in $[0,2]$; mentre è monotona strettamente crescente in $[-2,0]$ e in $[2,+\infty[$.

In particolare, essendo $f\in C(\mathbb{R})$, -2 è punto di minimo locale, 0 è p.to di massimo locale e 2 è punto di minimo locale.

Inoltre
$$\lim_{x\to -2^-} f'(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x\,\mathrm{sgn}(x^2-4)}{\sqrt{|x^2-4|}}\cdot\left(3\cosh\sqrt{|x^2-4|}+1\right)\cdot\frac{1}{\left(\cosh\left(\sqrt{|x^2-4|}\right)+3\right)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 2^-} f'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 2^+} f'(x)=+\infty$$

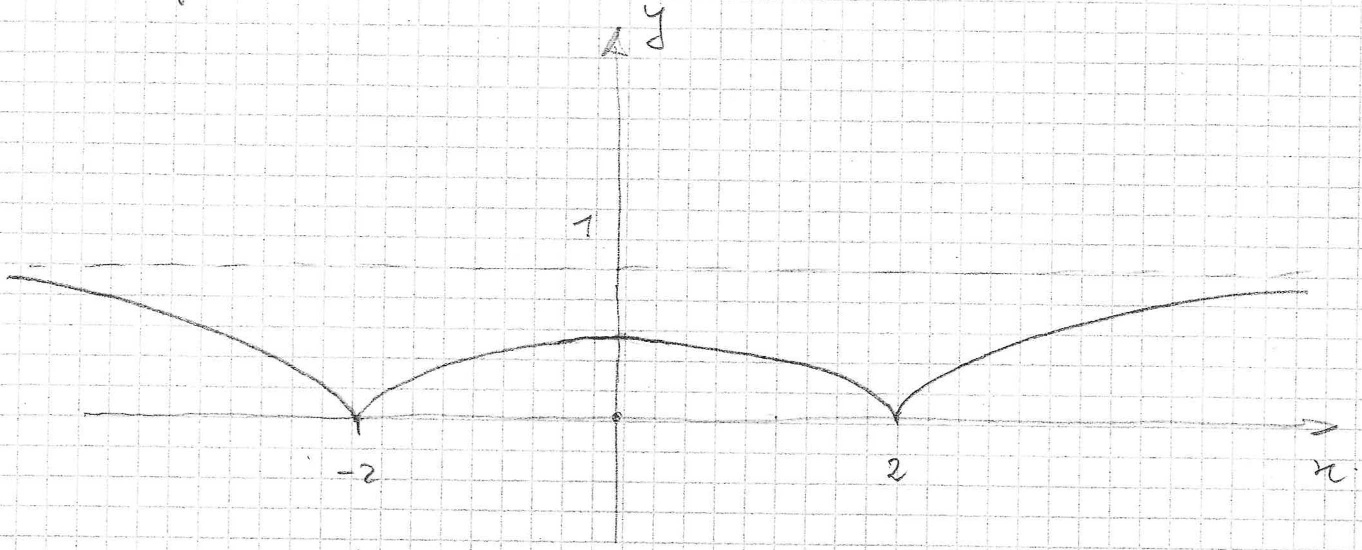
Pertanto f non è derivabile né in -2, né in 2, mentre è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sinh t}{\cosh t+3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2^{-1}e^t}{2^{-1}e^t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sinh t}{\cosh t+3}=1.$$

La retta $y=1$ è un asintoto

Grafico qualitativo $\qquad f(-2) = f(2) = 0 \quad ; \quad f(0) = \dfrac{\sinh 2}{\cosh 2 + 3} < 1$



in -2 e 2 la funzione realizza un minimo assoluto, in 0 si ha un massimo locale, non esiste massimo assoluto, anche se f è limitata e $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$

-2 e 2 sono punti cuspidali.

\# 4 $\quad y'' + 8y' + 20y = 3x$. Studiamo prima l'eq. omogenea

$y'' + 8y' + 20y = 0$: si tratta di un'eq. a coeff. costanti di ordine due. L'eq. caratteristica è $\lambda^2 + 8\lambda + 20 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. Le soluzioni sono complesse coniugate e $\lambda_1 = -4 + 2i$, $\lambda_2 = -4 - 2i$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea associata è

$$V_2 = \operatorname{span}\{e^{-4x}\cos(2x),\, e^{-4x}\sin(2x)\}.$$

Determiniamo ora una soluzione dell'eq. non omogenea con il metodo per simpatia: $3x = e^{0x} \cdot 3x$; poiché $(\alpha = 0)$ non è sol dell'eq. caratteristica, cerchiamo una sol. nella forma $\varphi(x) = Ax + B$. Pertanto $\varphi' = A \quad \varphi'' = 0$ e sostituendo

$8A + 20(Ax + B) = 3x$ ricaviamo $20Ax + 20B + 8A = 3x$ che deve essere verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi richiediamo che $\begin{cases} 20A = 3 \\ 20B + 8A = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A = \dfrac{3}{20} \\ B = -\dfrac{6}{100} = -\dfrac{3}{50} \end{cases}$

Pertanto $\psi(x) = \frac{3}{20}x - \frac{3}{50}$ e l'integrale generale dell'eq. non omogenea sarà

$$LV_2 = \overline{V}_2 + \frac{3}{20}x - \frac{3}{50}.$$

#5 $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(9+x)}{x^4}\left(\frac{4x}{\sqrt{1+4x}} - \sin(4x) + 8x^2 - \frac{104}{3}x^3\right) = 80\sin 9$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + o(t^3), \quad t \to 0$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^6), \quad t \to 0$$

D'altra parte $$\frac{4x}{\sqrt{1+4x}} \underset{x\to 0}{\sim} 4x\left(1 - \frac{1}{2}(4x) + \frac{3}{8}(4x)^2 - \frac{5}{16}(4x)^3 + o(x^3)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} 4x - \frac{(4x)^2}{2} + \frac{3}{8}(4x)^3 - \frac{5}{16}(4x)^4 + o(x^4).$$

Inoltre $$-\sin(4x) + 8x^2 \frac{104}{3}x^3 \sim -4x + \frac{(4x)^3}{3!} - \frac{(4x)^5}{5!} + o(x^6) + 8x^2 - \frac{104}{3}x^3$$

Pertanto

$$\frac{4x}{\sqrt{1+4x}} - \sin(4x) + 8x^2 - \frac{104}{3}x^3 \sim \cancel{4x} - \cancel{\frac{(4x)^2}{2}} + \frac{3}{8}(4x)^3 - \frac{5}{16}(4x)^4 + o(x^4)$$
$$- \cancel{4x} + \frac{(4x)^3}{3!} - \frac{(4x)^5}{5!} + \cancel{8x^2} - \frac{104}{3}x^3 + o(x^6)$$

$$\sim \left(\frac{3}{8}\cdot 4^3 + \frac{4^3}{6} - \frac{104}{3}\right)x^3 - \frac{5}{16}4^4 \cdot x^4 + o(x^4)$$

$$\sim \left(\underbrace{24 + \frac{2}{3}\cdot 16 - \frac{104}{3}}_{=0}\right)x^3 - \frac{5}{16}4^4 \cdot x^4$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} -80x^4.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(9+x)}{x^4}\cdot\left(\frac{4x}{\sqrt{1+x}} - \sin(4x) + 8x^2 - \frac{104}{3}x^3\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 9}{x^4}(-80x^4)$$
$$= -80\sin 9$$

6

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4\cdot 5^{n+1}+\sqrt[n]{n^n+4^n}}{\frac{5^n}{n^2+4}+\frac{4^n+1}{4^{n+1}+2}\cdot 5^n} = 80$$

$$N \sim 20\cdot 5^n + n\sqrt[n]{1+\left(\frac{4}{n}\right)^n} \sim 20\cdot 5^n$$

$$D \sim \frac{5^n}{n^2}+\frac{5^n}{4} \sim \frac{5^n}{4}$$

Pertanto $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{N}{D} = \lim_{n\to+\infty}\frac{20\cdot 5^n}{\frac{1}{4}5^n} = 80$

7

$$h(x) = g\left(\sin^2\left(2x+\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) \quad ; \quad h'(0)\ ?$$

$$g'(0)=1,\quad g'\left(\tfrac{1}{2}\right)=7,\quad g'\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)=49,\quad g'\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\tfrac{1}{7}$$

$$h'(x)=g'\left(\sin^2\left(2x+\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)2\sin\left(2x+\tfrac{3}{4}\pi\right)\cos\left(2x+\tfrac{3}{4}\pi\right)\cdot 2$$

$$h'(0)=g'\left(\sin^2\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)\cdot 4\cdot\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)$$

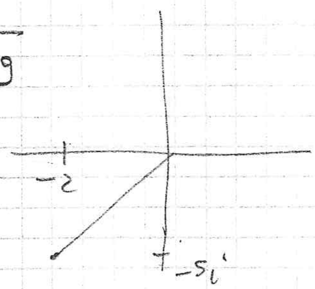
$$=g'\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -7\cdot 2 = -14$$

8

$$(z^5+2+5i)(z^2+10iz-29)=0$$

$$z^5=-2-5i \quad ; \quad |-2-5i| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$\varphi = \arg(-2-5i) = \arctan\frac{5}{2}+\pi$$



$$z_k = (29)^{\frac{1}{10}}\, e^{i\theta_k}$$

con $\theta_k = \dfrac{\varphi+2k\pi}{5}$, $k=0,1,2,3,4.$

$z^2 + 10iz - 29 = 0$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = -25 + 29 = 4$

$z_{1,2} = -5i \pm 2$; $\qquad z_5 = -5i + 2, \quad z_6 = -5i - 2.$