$$\# \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) - \sinh(3x)\cos(x)}{\left(e^{4x^3} - e^{2x^3}\right)\cos(3x)}$$

$$\sin(3x) \sim 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^6) \quad , \quad x \to 0$$

$$\sinh(3x) \sim 3x + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^6) \quad , \quad x \to 0$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \quad , \quad x \to 0$$

$$\cos(3x) \sim 1 \quad , \quad x \to 0$$

$$e^{4x^3} \sim 1 + 4x^3 + o(x^3) \quad , \quad x \to 0$$

$$e^{2x^3} \sim 1 + 2x^3 + o(x^3) \quad , \quad x \to 0$$

$$N \sim 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^6) - \left(3x + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^6)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) \sim \cancel{3x} - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + o(x^6) - \cancel{3x} - \frac{(3x)^3}{3!}$$

$$+ \frac{3x^3}{2} + o(x^3) \sim -\frac{1}{3}(3x)^3 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3) \sim -9x^3 + \frac{3}{2}x^3$$

$$\sim -\frac{15}{2}x^3$$

$$D \sim 2x^3$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{15}{2}x^3}{2x^3} = -\frac{15}{4}.$$

Solo complessivo

#2 $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{25n^2+7n} - \sqrt{25n^2+10} \right) = \frac{7}{10}$

$$\sqrt{25n^2+7n} - \sqrt{25n^2+10} \sim \frac{\cancel{25n^2}+7n-\cancel{25n^2}-10}{\sqrt{25n^2+7n}+\sqrt{25n^2+10}}$$

$$\overset{n \to +\infty}{\sim} \quad \frac{7n}{10n} \sim \frac{7}{10}$$

#3
$$\int_0^1 \frac{e^{6x}}{e^{12x}+5e^{6x}+25}\,dx$$

$e^{6x}=t \quad dt = 6e^{6x}dx$, quindi

$$\int_0^1 \frac{e^{6x}}{e^{12x}+5e^{6x}+25}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^{e^6} \frac{dt}{t^2+5t+25}$$

$\Delta = 25-100 = -75<0$

$$= \frac{1}{6}\int_1^{e^6} \frac{dt}{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+25-\frac{25}{4}} = \frac{1}{6}\int_1^{e^6} \frac{dt}{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot 25}$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^{e^6} \frac{dt}{\frac{3}{4}\cdot 25\left\{\left[\frac{2}{5\cdot\sqrt{3}}\left(t+\frac{5}{2}\right)\right]^2+1\right\}}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3\cdot 25}\int_1^{e^6} \frac{1}{\left[\frac{2}{5\cdot\sqrt{3}}\left(t+\frac{5}{2}\right)\right]^2+1}\,dt$$

posto $\frac{2}{5\sqrt{3}}\left(t+\frac{5}{2}\right)=s$, $ds = \frac{2}{5\sqrt{3}}\,dt$

$$= \frac{\cancel{2}}{9\cdot 25}\,\frac{5\sqrt{3}}{\cancel{2}} \int_{\frac{7}{5\sqrt{3}}}^{\frac{2}{5\sqrt{3}}\left(e^{6}+\frac{5}{2}\right)} \frac{ds}{s^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{45}\Big[\arctan s\Big]_{s=\frac{7}{5\sqrt{3}}}^{s=\frac{2}{5\sqrt{3}}\left(e^{6}+\frac{5}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{45}\left(\arctan\left(\frac{2}{5\sqrt{3}}\left(e^{6}+\frac{5}{2}\right)\right) - \arctan\left(\frac{7}{5\sqrt{3}}\right)\right).$$

#4 (Solo complessivo) $g(2\pi)=2\pi$, $g\left(\frac{7}{2}\pi\right)=\frac{3}{4}\pi$, $g'(2\pi)=3$, $g'\left(\frac{7}{2}\pi\right)=4$

$$h(x) = \left(\sin\left(g\left(x+\tfrac{3}{2}\pi\right)\right)\right)^5$$

$$h'(x) = 5\left(\sin\left(g\left(x+\tfrac{3}{2}\pi\right)\right)\right)^4 \cdot \cos\left(g\left(x+\tfrac{3}{2}\pi\right)\right) g'\left(x+\tfrac{3}{2}\pi\right)$$

$$h'(2\pi) = 5\left(\sin g\left(\tfrac{7}{2}\pi\right)\right)^4 \cdot \cos\left(g\left(\tfrac{7}{2}\pi\right)\right) g'\left(\tfrac{7}{2}\pi\right)$$

$$= 5\left(\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)^4 \cdot \cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\cdot 4$$

$$= 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 4 = -\frac{5}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

#5 $\alpha > 0$
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{17}\sin\frac{1}{x^6+1}}{x^{\alpha}(x^2+6)}\,dx$$

Se $x \to 0$
$$\frac{x^{17}\cdot \sin\frac{1}{x^6+1}}{x^{\alpha}(x^2+6)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{17}\sin 1}{6x^{\alpha}} \sim \frac{\sin 1}{6x^{\alpha-17}}$$

quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{17}\cdot\sin\frac{1}{x^6+1}}{x^{\alpha}(x^2+6)}\,dx$ converge se e solo se

$$\alpha - 17 < 1 \iff \alpha < 18.$$

Se $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{x^{17} \sin \frac{1}{x^6+1}}{x^\alpha (x^2+6)} \sim \dfrac{\frac{x^{17}}{x^6}}{x^{2+\alpha}}$, $x \to +\infty$

(infatti $\sin \frac{1}{x^6+1} \sim \frac{1}{x^6}$, se $x \to +\infty$)

$$\sim \frac{1}{x^{2+\alpha+6-17}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-9}}$$

Pertanto $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{17} \sin \frac{1}{x^6+1}}{x^\alpha (x^2+6)}\, dx$ converge

se e solo se $\alpha - 9 > 1$, cioè per $\alpha > 10$.

Possimo allora concludere che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{17} \sin \frac{1}{x^6+1}}{x^\alpha (x^2+6)}\, dx$

converge se e solo se $10 < \alpha < 18$.

N.B. $\dfrac{x^{17} \sin \frac{1}{x^6+1}}{x^\alpha (x^2+6)}$ è definitivamente positivo!

6

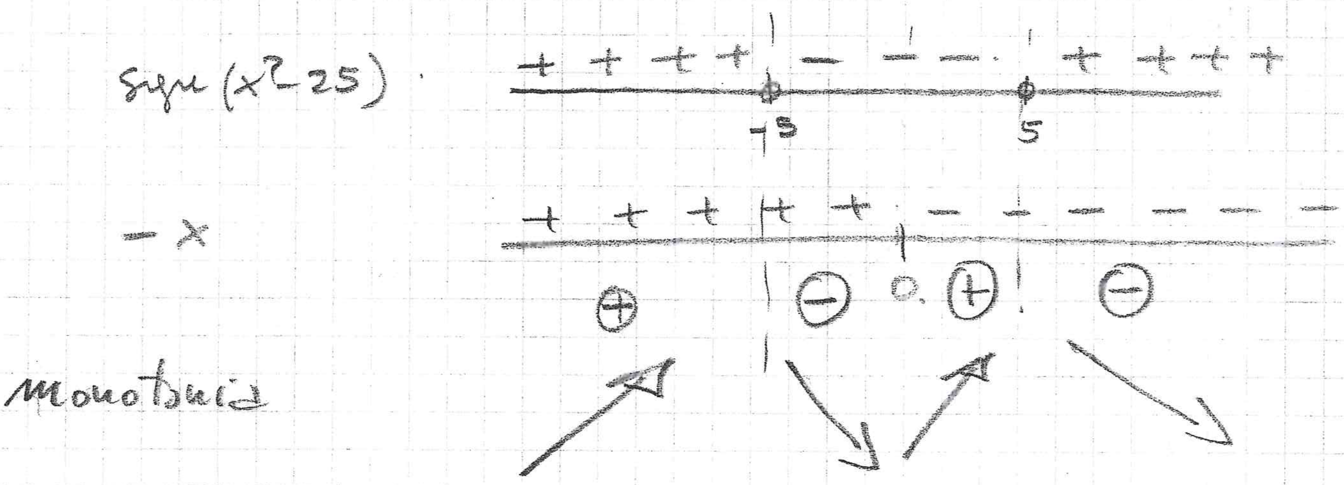
$$f(x) = \arctan \frac{6}{|x^2-25|+6}, \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$, perché composizione di funzioni derivabili (arctan è derivabile in $\mathbb{R}$, mentre $\frac{6}{|x^2-25|+6}$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-5,5\}$.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{6}{|x^2-25|+6}\right)^2} \cdot \frac{-12x \,\mathrm{sgn}(x^2-25)}{\left(|x^2-25|+6\right)^2}$$

Quindi $\begin{cases} f' > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x \,\mathrm{sgn}(x^2-25) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\} \end{cases}$



$$\lim_{x \to -5^-} f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{60}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$\lim_{x \to -5^+} f'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{60}{36} = -\frac{5}{6}$$

$$\lim_{x \to 5^-} f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{60}{36} = \frac{5}{6}$$

$$\lim_{x \to 5^+} f'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{60}{36} = -\frac{5}{6}$$

Quindi effettivamente f non è derivabile né in -5 né in 5. In -5 e in 5 troviamo due punti angolosi

-5 è p.to di massimo locale (assoluto)

0 " p.to di minimo locale perché la funzione è non negativa, ma $f(0)>0$

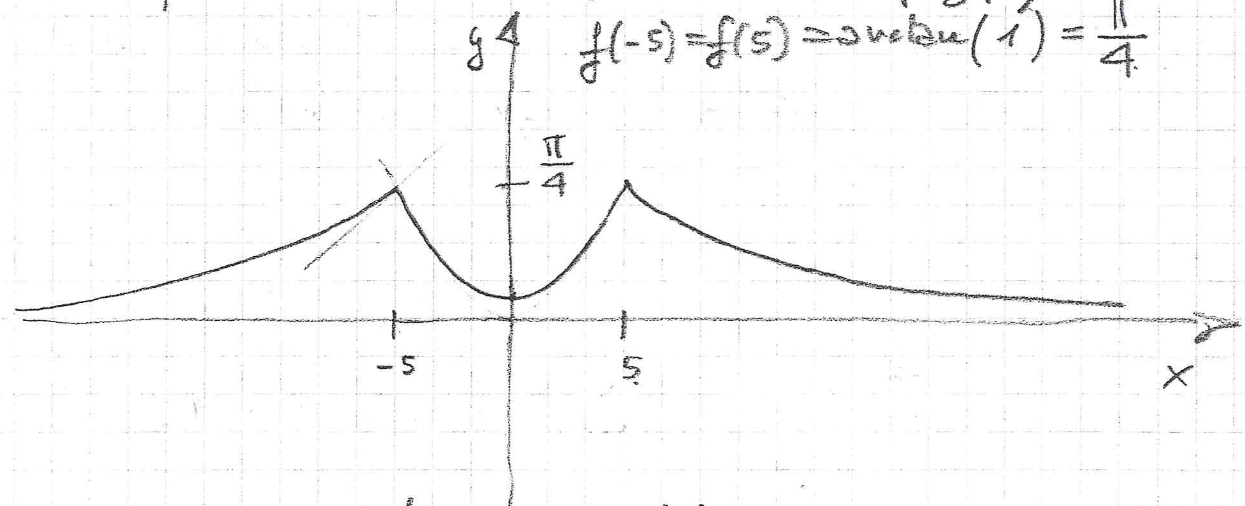
5 è p.to di massimo locale

La funzione è pari e $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Grafico qualitativo

$f(0) = \arctan\left(\frac{6}{31}\right)$

$f(-5)=f(5)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$



$y=0$ è un asintoto orizzontale.

$f(\mathbb{R}) = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(Solo per chi svolge la II prova parziale)

Calcolare f'' in $\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$.

Poiché $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{6}{|x^2-25|+6}\right)^2} \cdot \dfrac{-12x\,\mathrm{sgn}(x^2-25)}{(|x^2-25|+6)^2}$

$$= \frac{-12x\,\mathrm{sgn}(x^2-25)}{(|x^2-25|+6)^2+36}$$

avremo per $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$

$$f''(x) = \frac{-12\, \mathrm{sgn}(x^2-25)\left[\left(|x^2-25|+6\right)^2+36\right] + 12x\, \mathrm{sgn}^2(x^2-25)\cdot 2\left(|x^2-25|+6\right)\cdot 2x}{\left(\left(|x^2-25|+6\right)^2+36\right)^2}$$

$$= \frac{-12\, \mathrm{sgn}(x^2-25)\left[\left(|x^2-25|+6\right)^2+36\right] + 48x^2\left(|x^2-25|+6\right)}{\left(\left(|x^2-25|+6\right)^2+36\right)^2}.$$

Pertanto se $x \in (0,5)$ $f''>0$ perché $\mathrm{sgn}(x^2-25)<0$ e il numeratore (come il denominatore) risulta positivo in tale intervallo.
Quindi f è convessa in $(0,5)$.

#7 $y''+6y'=3x+e^{6x}$. Calcoliamo l'integrale generale dell'eq. differenziale lineare omogenea associata.

$y''+6y'=0$.

L'equazione caratteristica è: $\lambda^2+6\lambda=0 \iff \lambda=0, \lambda=-6$

$V_2 = \mathrm{span}\{1, e^{-6x}\} = \{\varphi \in C^2(\mathbb{R}) : \varphi(x) = c_1 + c_2 e^{-6x}$
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

Cerchiamo ora con il metodo per simpatia una soluzione di $y''+6y'=3x$ poiché $\alpha=0$ è sol. dell'eq. caratteristica, cercheremo una sol. nella forma

$$\psi_1 = x\,(Ax+B)$$

$\psi_1' = Ax+B+Ax = 2Ax+B$

$\psi_1'' = 2A$

Quindi $2A + 6\cdot(2Ax+B) = 3x$ $\forall x \in \mathbb{R}$, implica

$12Ax + 2A + 6B = 3x \iff 12A=3$ e $2A+6B=0$

$A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{12}$; pertanto $y_1 = x\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}\right)$

Analogamente cerchiamo una soluzione con il metodo per simpatia di

$$y''+6y' = e^{6x}.$$

Cerchiamo una soluzione nella forma $y_2 = Ke^{6x}$. Pertanto:
$y_2' = 6Ke^{6x}$, $y_2'' = 36Ke^{6x}$. Sostituendo si ha

$$36Ke^{6x}+36Ke^{6x}=e^{6x} \iff 72K=1 \iff$$

$K=\frac{1}{72}$. Quindi $y_2 = \frac{1}{72}e^{6x}$

Finalmente l'integrale generale di $y''+6y' = 3x+e^{6x}$ è

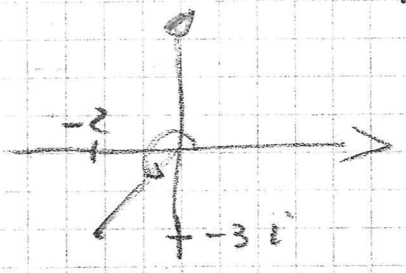
$$LV = V + x\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{72}e^{6x}.$$

#8 $\left(z^2+(2+6i)z+12i\right)\left(z^6+2+3i\right)=0$ (Solo complessivo)

$z^2+(2+6i)z+12i=0 \iff (z+2)(z+6i)=0 \iff$
$\boxed{z=-2}$ $\vee$ $\boxed{z=-6i}$.

$z^6+2+3i=0 \iff z^6=-2-3i \iff z^6=\sqrt{4+9}\; e^{i\varphi}$

con $\varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)+\pi$



e $|-2-3i| = \sqrt{13}$.

Quindi le soluzioni di $z^6=-2-3i$ sono

$$\boxed{z_k = 13^{\frac{1}{12}}\, e^{i\theta_k} \quad \text{con } \theta_k = \frac{\varphi+2k\pi}{6}, \quad k=0,1,2,3,4,5}$$

Solo per la II^a prova parziale

$$\int_0^{\pi/4} (6x^2+3x)\sin(6x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{\cos(6x)}{6}(6x^2+3x)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\pi/4}(12x+3)\frac{\cos(6x)}{6}\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)\cdot\left(6\cdot\frac{\pi^2}{16}+\frac{3}{4}\pi\right) + \left[\frac{1}{36}\sin(6x)(12x+3)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$-\frac{1}{36}\int_0^{\pi/4} 12\sin(6x)\,dx = \frac{1}{36}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)(3\pi+3) + \frac{1}{18}\left[\cos 6x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{36}(3\pi+3) + \frac{1}{18}\left(\cos\frac{3}{2}\pi - 1\right) = -\frac{\pi+1}{12} - \frac{1}{18} = -\frac{\pi}{12} - \frac{3+2}{36}$$

$$= -\frac{\pi}{12} - \frac{5}{36} = -\frac{3\pi+5}{36}$$