#1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan^2(7+x)\,\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^{11}(1+x^3)}\,dx$. Esaminiamo

$$\int_0^1 \arctan^2(7+x)\,\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^{11}(1+x^3)}\,dx$$

$$\arctan^2(7+x)\,\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^{11}(1+x^3)} \sim \arctan^2(7)\,\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^{2\alpha}}{2}}{x^{11}(1+x^3)}, \quad x\to 0$$

$$\sim \frac{\arctan^2(7)}{2}\cdot\frac{1}{x^{11-2\alpha}}, \qquad x\to 0$$

Pertanto l'integrale converge se $11-2\alpha<1$ cioè per $\alpha>5$.

Consideriamo ora $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan^2(7+x)\,\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^{11}(1+x^3)}\,dx$.

$$\left|\arctan^2(7+x)\,\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^{11}(1+x^3)}\right| \le \frac{|\arctan(7+x)|}{x^{11}(1+x^3)},$$

Quindi $\displaystyle\frac{|\arctan(7+x)|}{x^{11}(1+x^3)} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{14}}, \quad x\to+\infty$

e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{14}}\,dx < +\infty$, implica per il criterio del confronto che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan^2(7+x)\,\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^{11}(1+x^3)}\,dx$ converge per ogni $\alpha>0$.

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \arctan^2(7+x)\,\frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^{11}(1+x^3)}\,dx$$

converge (per $\alpha>0$) se e solo se $\alpha>5$

#2 $\left(z^4+6iz^2+1\right)\left(z^4-5i+1\right)=0$

$z^4+6iz^2+1=0 \quad \vee \quad z^4-5i+1=0$

posto $z^2=v$

$v^2+6iv+1=0$

$v_{1,2}=-3i\pm\sqrt{-9-1}$ $\begin{cases} -3i+i\sqrt{10}, & z^2=(\sqrt{10}-3)i=(\sqrt{10}-3)e^{i\frac{\pi}{2}} \\ -3i-i\sqrt{10}, & z^2=-(\sqrt{10}+3)i=(\sqrt{10}+3)e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$z_4=\sqrt{\sqrt{10}-3}\;e^{i\frac{\pi}{4}};\quad z_5=-\sqrt{\sqrt{10}-3}\;e^{i\frac{\pi}{4}};\quad z_6=\sqrt{\sqrt{10}+3}\;e^{-i\frac{\pi}{4}};\quad z_7=-\sqrt{\sqrt{10}+3}\,e^{-1}$

Per quanto riguarda $z^4=5i-1$; $|5i-1|=\sqrt{26}$

$\varphi=\arg(5i-1)=-\arctan(5)+\pi$. Quindi

$z_k=(26)^{1/8}e^{i\theta_k}$, con $\theta_k=\dfrac{\varphi+2k\pi}{4}$, $k=0,1,2,3$.

#3 $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{4^n}{5n^{100}+9}\left(1024n^{99}+625n^{98}\right)}{\dfrac{4^{n-1000}}{n+5}+5n^{5000}}$$

$N\sim\dfrac{1024}{5}\dfrac{4^n}{n}$, $n\to+\infty$

$D\sim\dfrac{4^{n-1000}}{n}$. Quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{N}{D}=\frac{1024}{5}\cdot4^{1000}$

#4 $$I=\int_0^3\frac{\sinh(4x)}{\sinh^2(4x)+6\cosh(4x)}\,dx$$, ricordiamo che

$\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$; quindi

$$I=\int_0^3\frac{\sinh(4x)}{\cosh^2(4x)-1+6\cosh(4x)}\,dx$$, poi ponendo

$\cosh(4x) = t \qquad dt = 4\sinh(4x)\,dx \qquad$ otteniamo

$$I = \frac{1}{4}\int_{\cosh(0)}^{\cosh(12)} \frac{1}{t^2-1+6t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{1}^{\cosh(12)} \frac{1}{(t+3-\sqrt{10})\,(t+3+\sqrt{10})}\,dt$$

$$\Delta = 9+1 = 10$$

$$t^2+6t-1=0 \iff t_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}$$

Cerchiamo A e B t.c.

$$\frac{A}{t+3-\sqrt{10}} + \frac{B}{t+3+\sqrt{10}} = \frac{1}{(t+3-\sqrt{10})\,(t+3+\sqrt{10})}$$

$$At + (3+\sqrt{10})A + Bt + (3-\sqrt{10})B = 1, \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ (3+\sqrt{10})A + (3-\sqrt{10})B = 1 \end{cases} \qquad \det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3+\sqrt{10} & 3-\sqrt{10} \end{vmatrix} = \cancel{3}-\sqrt{10}-\cancel{3}-\sqrt{10} = -2\sqrt{10}$$

$$A = \frac{\det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3-\sqrt{10} \end{vmatrix}}{-2\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \; ; \quad B = \frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3+\sqrt{10} & 1 \end{vmatrix}}{-2\sqrt{10}} = -\frac{1}{2\sqrt{10}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{10}}\,\frac{1}{(t+3-\sqrt{10})} - \frac{1}{2\sqrt{10}}\,\frac{1}{t+3+\sqrt{10}} = \frac{1}{(t+3-\sqrt{10})\,(t+3+\sqrt{10})}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{8\sqrt{10}}\int_1^{\cosh(12)} \frac{1}{t+3-\sqrt{10}}\,dt - \frac{1}{8\sqrt{10}}\int_1^{\cosh(12)} \frac{1}{t+3+\sqrt{10}}\,dt$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{10}}\Big[\log|t+3-\sqrt{10}|\Big]_{t=1}^{t=\cosh(12)} - \frac{1}{8\sqrt{10}}\Big[\log|t+3+\sqrt{10}|\Big]_{t=1}^{t=\cosh(12)}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{10}}\left(\log\frac{|\cosh(12)+3-\sqrt{10}|}{4-\sqrt{10}} - \log\frac{\cosh(12)+3+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}}\right).$$

#5 $f(x) = \log\left(\frac{1}{5} + \frac{x^2+16}{x^2+|x-8|}\right) - \log\frac{6}{5}$

$\frac{1}{5} + \frac{x^2+16}{x^2+|x-8|} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché somma di funzioni positive. Pertanto f è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la derivabilità, f è certamente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{8\}$ perché per $x \in \mathbb{R} - 8$, f è composizione di funzioni derivabili.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \log\left(\frac{1}{5}+1\right) - \log\frac{6}{5} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \log\left(\frac{1}{5}+1\right) - \log\frac{6}{5} = 0$

Quindi $y=0$ è l'equazione di un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Calcoliamo f' in $\mathbb{R} \setminus \{8\}$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{x^2+16}{x^2+|x-8|}} \cdot \frac{2x(x^2+|x-8|) - (x^2+16)(2x + \operatorname{sgn}(x-8))}{(x^2+|x-8|)^2}$$

$f'(x) > 0$ per $x \in \mathbb{R} - \{8\}$ $\iff \begin{cases} 2x(x^2+|x-8|) - (x^2+16)(2x+\operatorname{sgn}(x-8)) > \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{8\} \end{cases}$

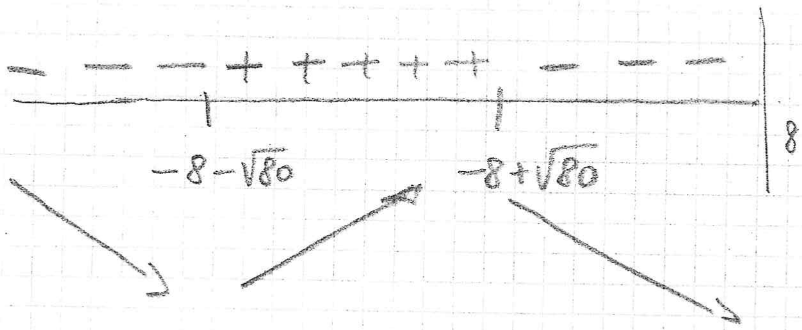
Caso $x < 8$

$$\begin{cases} x < 8 \\ 2x(x^2-x+8) - (x^2+16)(2x-1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 8 \\ \cancel{2x^3} - 2x^2 + 16x - \cancel{2x^3} + x^2 - 32x + 16 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 8 \\ -x^2 - 16x + 16 > 0 \end{cases} \qquad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+16}}{-1} \begin{matrix} -(8+\sqrt{80}) \\ -8+\sqrt{80} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x < 8 \\ -(8+\sqrt{80}) < x < -8+\sqrt{80} \end{cases} \iff -(8+\sqrt{80}) < x < -8+\sqrt{80}$$

(perché $-8+\sqrt{80} < 8$).



Caso $x>8$

$$\begin{cases} x>8 \\ 2x(x^2+x-8)-(x^2+16)(2x+1)>0 \end{cases}$$

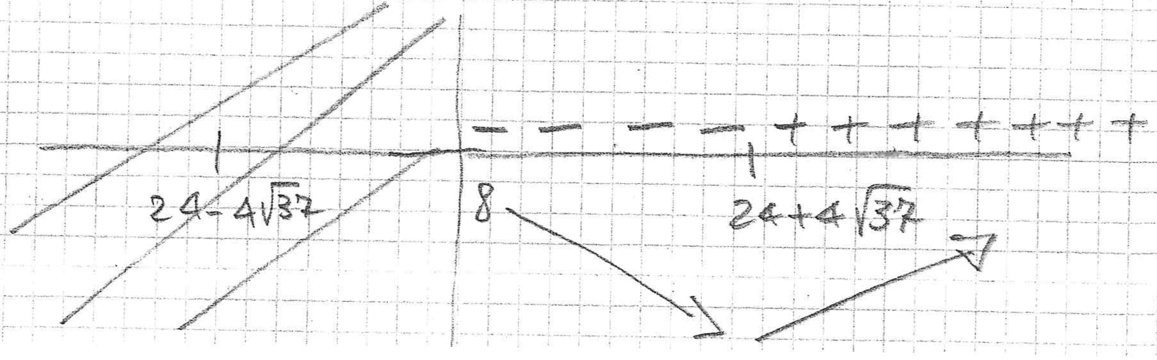
$$\begin{cases} x>8 \\ \cancel{2x^3}+\underline{2x^2}-16x-\cancel{2x^3}-\underline{x^2}-32x-16>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>8 \\ x^2-48x-16>0 \end{cases} \qquad x_{1,2} = 24 \pm \sqrt{24^2+16} = 24 \pm 4\sqrt{37}$$

$$\begin{cases} x>8 \\ x<24-4\sqrt{37} \ \vee \ x>24+4\sqrt{37} \end{cases} \Longleftrightarrow x>24+4\sqrt{37}$$

perché $24-4\sqrt{37} < 24-4\cdot 6 = 0$, mentre $24+4\sqrt{37}>8$.

Quindi

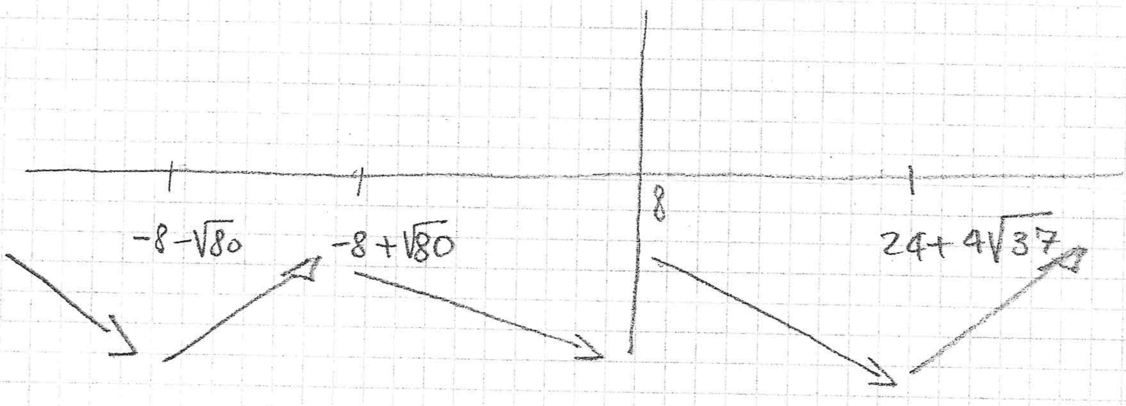


La funzione è continua in $\mathbb{R}$, perché composizione di funzioni continue, inoltre

$$\mathbb{R} \ni \lim_{x \to 8^-} f'(x) \neq \lim_{x \to 8^+} f'(x) \in \mathbb{R}$$

Quindi f non è derivabile in 8 e in 8 c'è un punto angoloso.

Per quanto riguarda la monotonia abbiamo unendo i due casi:



Pertanto f <u>è decrescente in</u> $]-\infty, -8-\sqrt{80}]$, in $[-8+\sqrt{80}, 24+4\sqrt{37}]$

Si noti infatti che la continuità in $\mathbb{R}$ permette di concludere che $f|_{[-8+\sqrt{80}, 8]}$ decrescente e $f|_{[8, 24+4\sqrt{37}]}$ decrescente implica $f|_{[-8+\sqrt{80}, 24+4\sqrt{37}]}$ decrescente

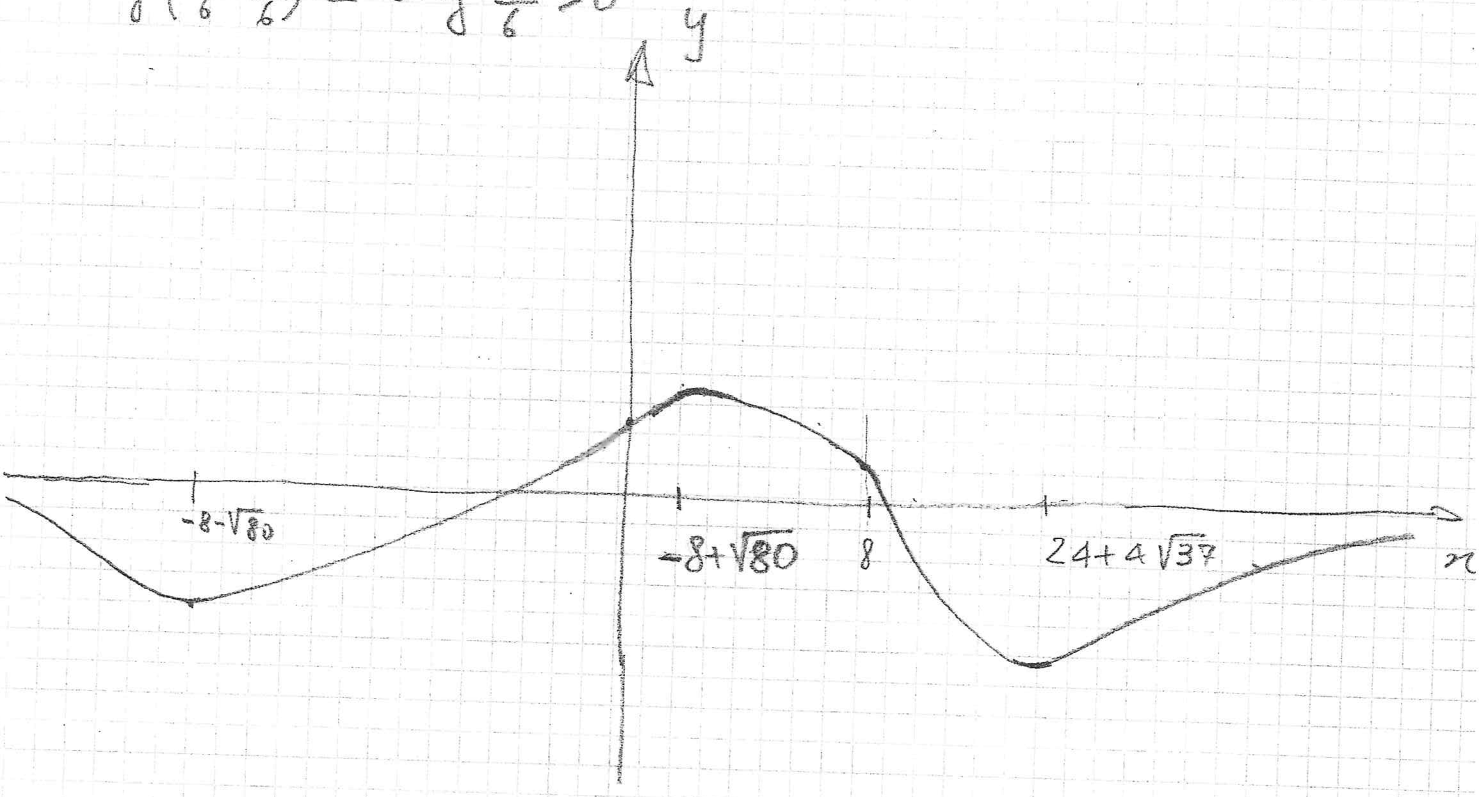
Mentre f è crescente in $[-8-\sqrt{80}, -8+\sqrt{80}]$ e in $[24+4\sqrt{37}, +\infty[$.

I seguenti punti sono estremanti per f:

$-8-\sqrt{80}$ e $24+4\sqrt{37}$ sono punti di minimo

mentre $-8+\sqrt{80}$ è p.to di massimo

Disegniamo un grafico qualitativo. Si noti che $f(0)=\log\left(\frac{1}{5}+2\right)-\log$
$=\log\left(\frac{1}{6}+\frac{10}{6}\right)=\log\frac{11}{6}>0$



$-8+\sqrt{80}>0$

$$f(8)=\log\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{64+16}{64}\right)\cdot\frac{5}{6}\right]=\log\frac{25}{24}>0$$

#6 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh^2(6x^2+5x^3)-\cos^2(6x^2+5x^3)}{\sinh^2(x)\left(\tan(5x^2)+25\sin^2 x\right)}$$

$$\cosh^2(6x^2+5x^3)-\cos^2(6x^2+5x^3)=\left(\cosh(6x^2+5x^3)-\cos(6x^2+5x^3)\right)\left(\cosh(6x^2+5x^3)+\cos(6x^2+5x^3)\right)$$

Quindi

$$N\sim\left(\cancel{1}+\frac{(6x^2+5x^3)^2}{2}+o(x^4)-\cancel{1}+\frac{(6x^2+5x^3)^2}{2}+o(x^4)\right)\cdot 2\quad,\ x\to 0$$

$$D\sim x^2\left(5x^2+25x^2\right)\quad,\ x\to 0$$

perché $\sinh(t) \sim t$, $\operatorname{tg} t \sim t$, $\sin t \sim t$, $t \to 0$

e quindi $\sinh^2(x) \sim x^2$, $\operatorname{tg} 5x^2 \sim 5x^2$, $\sin^2 x \sim x^2$ per $x \to 0$

Pertanto $$\lim_{x\to 0} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0} \frac{2(6x^2+5x^3)^2}{30x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{36x^4}{15x^4} = \frac{12}{5}$$

7

$y''-18y'+72y=3e^{12t}+6t$; EOA: $y''-18y'+72y=0$

E.C. $\lambda^2-18\lambda+72=0$ $\quad \lambda_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81-72} = 9 \pm 3 = <^{12}_{6}$

$V_2 = \operatorname{span}\{e^{12t}, e^{6t}\}$. Cerchiamo una sol di $y''-18y'+72y=3e^{12t}$ con il metodo delle caratt. Poiché 12 è sol. dell'eq. caratt. cercheremo ψ_1 nella forma $\psi_1 = kte^{12t}$. Quindi $\psi_1' = ke^{12t}+12kte^{12t}$; $\psi_1'' = 12ke^{12t}+12ke^{12t}+144kte^{12t}$. Sostituendo nell'eq. diff. si ha: $24ke^{2t}+\cancel{144kte^{12t}}-18(ke^{12t}+\cancel{12kte^{12t}})$ $+\cancel{72kte^{12t}}=3e^{12t} \iff 24ke^{2t}-18ke^{12t}=3e^{12t} \iff$ $6k=3$ cioè $k=\frac{1}{2}$. Pertanto $\psi_1 = \frac{1}{2}te^{12t}$

Analogamente cerchiamo una sol di $y''-18y'+72y=6t$ nella forma $\psi_2 = A+Bt$. In part. $\psi_2' = B$, $\psi_2''=0$ e sost. si ottiene $-18B+72(A+Bt)=6t$ da cui segue $72A-18B=0$ e $72B=6 \to B=\frac{1}{12}$ e $A=\frac{18}{12\cdot 72}=\frac{1}{144}$ cioè $\psi_2 = \frac{1}{144}+\frac{1}{12}t$. Pertanto

$$LV_2 = V_2 + \frac{1}{2}te^{12t} + \frac{1}{144} + \frac{1}{12}t$$

8

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(4)=-1$, $f'(4)=\frac{1}{5}$, $g(5)=4$, f, g deriv

$h(x) = \dfrac{1+f(4x)}{2+g^2(5x)}$. Allora $h'(x) = \dfrac{4f'(4x)(2+g^2(5x)) - (1+f(4x))10g'(5x)g(5x)}{(2+g^2(5x))^2}$

Quindi $$h'(1) = \frac{4f'(4)(2+g^2(5)) - (1+f(4))\,10\,g(5)\,g'(5)}{(2+g^2(5))^2} = \frac{4\cdot\frac{1}{5}(2+16)}{(2+16)^2}$$
$$= \frac{4}{5\cdot 18} = \frac{2}{45}.$$

N.B. Gli esercizi (2), (3) e (8) non erano nella seconda prova parziale.