PRIMA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA T-1
del 19/11/2011

COGNOME E NOME ....

Corso di Laurea in Ingegneria ....

N. di matricola ....

---

(1) [4 punti] Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3n^{\frac{2}{n}-1}+4\sqrt[n]{n^2}\right)^n\left(e^{4n}-n^{300}\right)}{4^n n^2(e^{4(n-3)}+n^{302})}$$

---

(2) [6 punti] Sia

$$f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}\,,\qquad f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{4-x^2}}\,, & \text{se } \ 0\le x<2\,,\\ (x-2)^2\left(\sin(2x)+\cos^3 x\right)\,, & \text{se } \ x\ge 2\,. \end{cases}$$

1. Dimostrare che f è continua in $[0,+\infty[$;
2. calcolare $f'(c)$, $\forall c\in[0,+\infty[\setminus\{2\}$;
3. stabilire se f è derivabile in 2 .

---

(3) [5 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{3x-4}}{(49x^2-784)\sin(x+4)}\,.$$

---

(4) [4 punti] Determinare le soluzioni dell'equazione in $\mathbb{C}$

$$\left(4z^2-(16-7i)z-28i\right)\ \left(z^5+4-7i\right)=0\,.$$

(5) [3 punti] Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, tale che

$$g\left(\frac{3\pi}{28}\right) = 9\,, \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 10\,, \quad g'\left(\frac{3\pi}{28}\right) = 7\,, \quad g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\,.$$

Posto

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = g\left(2\sin^3(7x)\right)\,,$$

calcolare $h'\left(\frac{3\pi}{28}\right)$.

---

(6) [4 punti] Determinare l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione

$$\sqrt{x^2 - 4x} > -\mid x \mid -7x\,.$$

---

(7) [7 punti] Sia

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad h(x) = \begin{cases} -6x\,, & \text{se } x \le 0\,, \\ e^{7x} - 1\,, & \text{se } 0 < x \le \dfrac{2}{\pi}\,, \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\,, & \text{se } x > \dfrac{2}{\pi}\,. \end{cases}$$

1. Stabilire in quali punti h è continua e in quali è discontinua;
2. Studiare l'esistenza dei limiti di $h(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ e determinarne il valore se esistono;
3. Disegnare il grafico di h ;
4. Dimostrare rigorosamente quanto asserito al punto 1.