#1

$$\int_1^2 \frac{1}{\cosh(5x)+1}\,dx$$

$\cosh(5x) = \dfrac{e^{5x}+e^{-5x}}{2}$, quindi $\cosh(5x)+1 = \dfrac{e^{5x}+e^{-5x}}{2}+1$

$= \dfrac{e^{10x}+1+2e^{5x}}{2e^{5x}}$. Pertanto

$$\int_1^2 \frac{1}{\cosh(5x)+1}\,dx = \int_1^2 \frac{2e^{5x}}{e^{10x}+2e^{5x}+2}\,dx. \text{ Posto}$$

$e^{5x}=t \quad dt = 5e^{5x}dx$ si ottiene

$$\int_1^2 \frac{2e^{5x}}{e^{10x}+2e^{5x}+2}\,dx = \frac{2}{5}\int_{e^5}^{e^{10}} \frac{dt}{t^2+2t+2} = \frac{2}{5}\int_{e^5}^{e^{10}} \frac{dt}{(t+1)^2+1}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1-2<0$$

$$= \frac{2}{5}\Big[\arctg(t+1)\Big]_{t=e^5}^{t=e^{10}} = \frac{2}{5}\left(\arctg(e^{10}+1)-\arctan(e^5+1)\right).$$

#2

$\beta \in \mathbb{R}^+$ $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x^5}-2x^5-1}{\sinh(\beta x^\beta)}\,dx$$

se $x \to 0^+$, allora $$\frac{e^{2x^5}-2x^5-1}{\sinh(\beta x^\beta)} \sim \frac{\cancel{1}+\cancel{2x^5}+\frac{4x^{10}}{2}-\cancel{2x^5}-\cancel{1}+o(x^{10})}{\beta x^\beta+o(x^{2\beta})}$$

perché $e^t \sim 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$, $t\to 0$ e

$\sinh(t) = t+o(t^2)$, $t \to 0$

$$\sim \frac{2x^{10}}{\beta x^\beta} \sim \frac{2}{\beta}\,\frac{1}{x^{\beta-10}}, \quad x\to 0. \text{ Pertanto}$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x^5}-2x^5-1}{\sinh(\beta x^\beta)}\,dx \quad \text{converge se e solo se}$$

$\beta-10<1$ cioè se e solo se $\beta<11$ (e $\beta>0$)

Esaminiamo ora il caso $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x^5}-2x^5-1}{\sinh(\beta x^\beta)}\,dx$

Poiché $\displaystyle\frac{e^{2x^5}-2x^5-1}{\sinh(\beta x^\beta)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x^5}}{\frac{1}{2}e^{\beta x^\beta}} \sim 2e^{2x^5-\beta x^\beta}$

(infatti $\sinh(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ e se $t\to+\infty$ $\sinh(t) \sim \dfrac{e^t}{2}$). Se $\beta\geq 5$ $2e^{2x^5-\beta x^\beta} \sim 2e^{-\beta x^\beta}$, $x\to+\infty$ allora $2e^{-\beta x^\beta} < 2e^{-\gamma x}$ e per il criterio del cfr. l'int. sarà conv. (con $\gamma=\beta$ se $\beta>5$ e $\gamma=3$ se $\beta=5$).

Se $\beta<5$, allora $2e^{2x^5-\beta x^\beta} \sim 2e^{2x^5}$ che non converge

Pertanto $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x^5}-2x^5-1}{\sinh}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\beta\geq 5$

Possiamo allora concludere che

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}-2x^5-1}{\sinh(\beta x^5)}\,dx \quad \text{convergerà}$$

se e solo se $\beta<11$ e $\beta\geq 5$, cioè

se e solo se $\beta\in[5,11[$.

#3 $\quad f(x)=\sinh\left(\dfrac{|x-3|-x^2}{|x-6|}\right)$

Il dominio naturale è $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$ per cui
$f: \mathbb{R}\setminus\{6\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Inoltre f è derivabile
per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{3,6\}$ perché composizione
di funzioni derivabili per $x \in \mathbb{R}\setminus\{3,6\}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh\left(\frac{|x-3|-x^2}{|x-6|}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sinh(-x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh\left(\frac{|x-3|-x^2}{|x-6|}\right) = \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to6^-} \sinh\left(\frac{|x-3|-x^2}{|x-6|}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to6^+} \sinh\left(\frac{|x-3|-x^2}{|x-6|}\right) = -\infty$$

$x=6$ è asintoto verticale. Non esistono asintoti orizzontali o obliqui perché $f(x) \sim -\frac{e^x}{2}$ per $x\to+\infty$ e $f(x) \sim -\frac{e^{-x}}{2}$, $x\to-\infty$

Calcoliamo f' in $\mathbb{R}\setminus\{3,6\}$; per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{3,6\}$

$$Df(x) = \cosh\left(\frac{|x-3|-x^2}{|x-6|}\right) \cdot \frac{(\mathrm{sgn}(x-3)-2x)|x-6| - \mathrm{sgn}(x-6)(|x-3|-x^2)}{|x-6|^2}$$

$$\begin{cases} Df(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{3,6\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(\mathrm{sgn}(x-3)-2x)|x-6| - \mathrm{sgn}(x-6)(|x-3|-x^2)}{(x-6)^2} > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{3,6\} \end{cases}$$

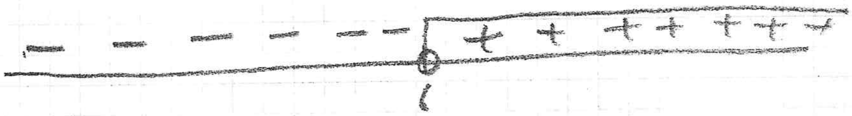
(infatti $\cosh\left(\frac{|x-3|-x^2}{|x-6|}\right) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3,6\}$)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{sgn}(x-3)-2x)|x-6| - \mathrm{sgn}(x-6)(|x-3|-x^2) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{3,6\} \end{cases}$$

(perché $|x-6|^2 = (x-6)^2 > 0$ per $x \neq 6$)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn}(x-6)\left[\left(\operatorname{sgn}(x-3)-2x\right)(x-6)-|x-3|+x^2\right]>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{3,6\} \end{cases}$$

$F_1=\operatorname{sgn}(x-6)$:

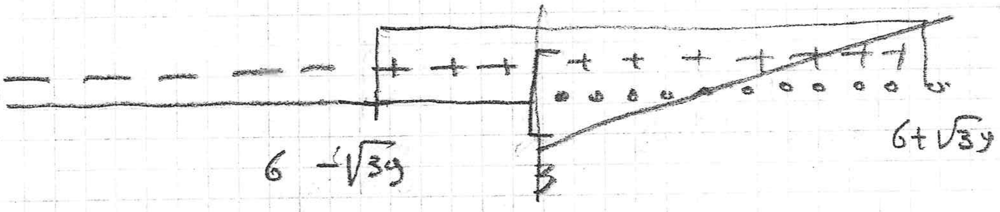


$$F_2=\left[\left(\operatorname{sgn}(x-3)-2x\right)(x-6)-|x-3|+x^2\right]= \begin{cases} (-1-2x)(x-6)+x-3+x^2 & \text{se } x<3 \\ (1-2x)(x-6)-x+3+x^2 & \text{se } x>3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2>0 \\ x<3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{-x}+6-2x^2+12x+\cancel{x}-3+x^2>0 \\ x<3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x^2+12x+3>0 \\ x<3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6-\sqrt{39}<x<6+\sqrt{39} \\ x<3 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{4}=36+3=39 \qquad x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{39}}{-1}=6\mp\sqrt{39}$$

sgn F_2 per $x<3$

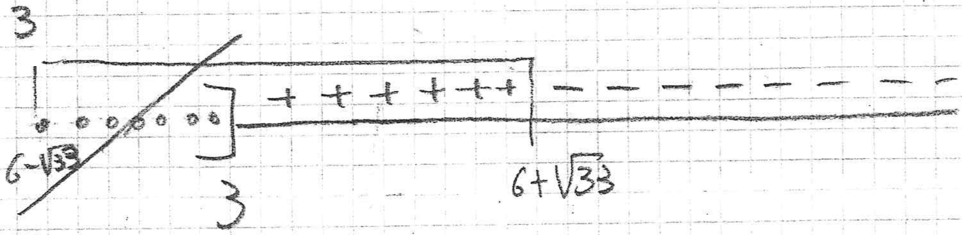


$$\begin{cases} F_2>0 \\ x>3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{x}-6-2x^2+12x\cancel{-x}+3+x^2>0 \\ x>3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x^2+12x-3>0 \\ x>3 \end{cases}$$

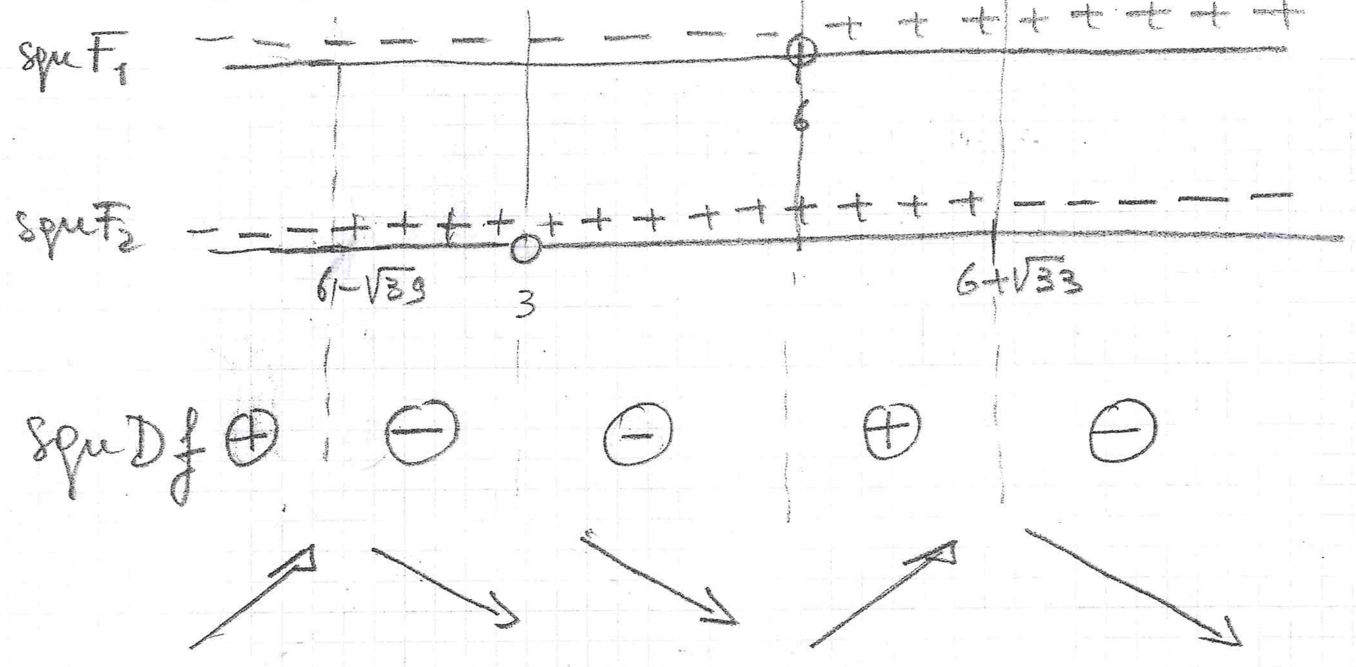
$$\frac{\Delta}{4}=36-3=33 \qquad x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{33}}{-1}=6\mp\sqrt{33}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6-\sqrt{33}<x<6+\sqrt{33} \\ x>3 \end{cases}$$

sgn F_2, $x>3$



In sintesi



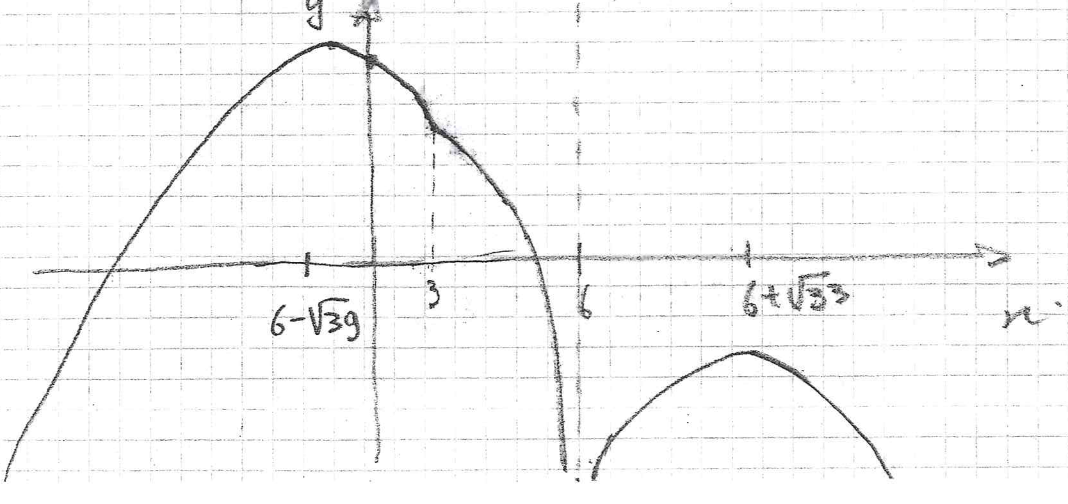
La funzione f è monotona crescente in $]-\infty, 6-\sqrt{39}]$ e in $]6, 6+\sqrt{33}]$

La funzione f è monotona decrescente in $[6-\sqrt{39}, 3]$ in $[3, 6[$ e in $[6+\sqrt{33}, +\infty[$. Poiché f è continua in $]-\infty, 6[$ risulta anche che f è monotona decrescente in $[6-\sqrt{39}, 6[$.

$6-\sqrt{39}$ è p.to di massimo locale per f

$6+\sqrt{33}$ è p.to di massimo locale per f

Disegniamo un grafico qualitativo per f; $f(0) = \operatorname{senh}\frac{1}{2}$



in $6-\sqrt{33}$ f realizza un massimo assoluto, mentre in $6+\sqrt{33}$ f realizza un massimo relativo.

Inoltre $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \cosh(-3)\frac{(-1-6)\,3+(-9)}{9} = -\frac{10}{3}\cdot\cosh(3)$

$\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \cosh(-3)\frac{(1-6)\,3+(-9)}{9} = -\frac{8}{3}\cdot\cosh(3)$

Per cui f non è derivabile in 3 e in 3 si ha un punto angoloso.

#4 $\quad y''-3y'+2y = e^{2x}+5x+2$

$y''-3y'+2y=0$

$\lambda^2-3\lambda+2=0 \longleftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \vee \lambda=1$

$V_2 = \text{span}\{e^{2x}, e^{x}\}$

$y''-3y'+2y=e^{2x}$. Metodo per simpatia $\alpha=2$ e

2 è sol di $\lambda^2-3\lambda+2=0$ di molteplicità 1.

Quindi cerchiamo una sol nella forma

$\varphi_1 = kx\,e^{2x}$

$\varphi_1' = ke^{2x}+2kxe^{2x}$; $\varphi_1'' = 2ke^{2x}+2ke^{2x}+4kxe^{2x}$
$= 4ke^{2x}+4kxe^{2x}$

Pertanto

$$\underbrace{4kxe^{2x}+4ke^{2x}}_{\varphi_1''}-3\underbrace{(ke^{2x}+2kxe^{2x})}_{\varphi_1'}+2kxe^{2x}=e^{2x}$$

da cui segue

$$\cancel{4kx}+4k-3k-\cancel{6kx}+\cancel{2kx}=1$$

$$k=1$$

Quindi $Y_1 = xe^{2x}$

Risolviamo ora $y'' - 3y' + 2y = 5x + 2$ con il metodo per simpatia.

$f_1 = 5x + 2 = e^{0x} \cdot (5x + 2)$. Quindi $\alpha = 0$ e poiché 0 non è sol di $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ cerchiamo una sol nella forma

$Y_2 = Ax + B$. Da cui:

$Y_2' = A$, $Y_2'' = 0$. Pertanto, sostituendo, otteniamo

$$-3A + 2(Ax + B) = 5x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi:

$2Ax + 2B - 3A = 5x + 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$, se e solo

se
$$\begin{cases} 2A = 5 \\ 2B - 3A = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{5}{2} \\ 2B - \frac{15}{2} = 2 \end{cases} \begin{cases} A = \frac{5}{2} \\ B = \frac{19}{4} \end{cases}.$$

Finalmente: $Y_2 = \frac{5}{2}x + \frac{19}{4}$.

Concludiamo allora che l'integrale generale di

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + 5x + 2$ è

$$LV_2 = \operatorname{span}\{e^{2x}, e^{x}\} + xe^{2x} + \frac{5}{2}x + \frac{19}{4}$$

#5
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + 4x - e^{4x}) \cosh(4x^2 + 3x + 1)}{\frac{1}{2}\tan(3x) + \cosh x - \sqrt{1 + 3x + 4x^3}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + 4x - e^{4x}) \cosh(1)}{\frac{1}{2}\tan(3x) + \cosh x - \sqrt{1 + 3x + 4x^3}}$$

$$e^{4x} \sim 1+4x+\frac{16x^2}{2} \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi $N \sim \left(\cancel{1}+\cancel{4x}-\cancel{1}-\cancel{4x}-8x^2\right)\cosh 1 \underset{x\to 0}{\sim} -8x^2\cosh 1$

$\operatorname{tg} t \sim t+\frac{t^3}{3}+o(t^3)$, $t\to 0$; $\cosh(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$;

$\sqrt{1+t} \sim 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o(t^3)$, $t\to 0$. Pertanto

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}(3x) \sim \frac{1}{2}\left(3x+\frac{(3x)^3}{3}+o(x^3)\right) \sim \frac{3}{2}x+\frac{9}{2}x^3+o(x^3);$$

$$\cosh x \sim 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad ;$$

$$\sqrt{1+3x+4x^3} \sim 1+\frac{1}{2}(3x)-\frac{9x^2}{8}+o(x^2) \quad , x\to 0.$$

Quindi

$$D \underset{x\to 0}{\sim} \cancel{\frac{3}{2}x}+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)+\cancel{1}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{1}-\cancel{\frac{3}{2}x}-\frac{9}{8}x^2$$

$$\sim -\frac{5}{8}x^2 \quad , x\to 0$$

Pertanto $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{N}{D} = \lim_{x\to 0}\frac{-8x^2\cosh 1}{-\frac{5}{8}x^2} = \frac{64}{5}\cosh(1).$

#6

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{4}{n^5}+\frac{3}{n^4}}{\frac{3}{n^6}-\frac{4}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{n^4}}{-\frac{4}{n^4}} = -\frac{3}{4}$$

g derivabile,

\#7 $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(10)=2 \;, \; g(4)=5$

$g'(10)=\frac{1}{16} \;, \; g'(4)=\frac{25}{2} \qquad h(x)=g\left(\frac{x}{5}+2\right)+\left(g(x)\right)^5$

Calcolare $h'(10)$.

$$h'(x)=g'\left(\frac{x}{5}+2\right)\frac{1}{5}+5g(x)^4\cdot g'(x)$$

$$h'(10)=g'(4)\,\frac{1}{5}+5g(10)^4\cdot g'(10)$$

$$=\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{5}+5\cdot 2^4\cdot\frac{1}{16}=\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}.$$

\#8

$$\left(z^4-(32+i)z^2+32i\right)\left(z^3+4+5i\right)=0$$

$$z^4-(32+i)z^2+32i=0 \quad \vee \quad z^3+4+5i=0$$

Risolviamo $z^4-(32+i)z^2+32i=0$, posto $z^2=v$ otteniamo

$v^2-(32+i)v+32i=0$, che possiamo scrivere (scomponendo il polinomio)

$(v-32)(v-i)=0$ da cui $v=32$ e $v=i$

Dobbiamo risolvere allora $\tilde{z}^2=32 \Longleftrightarrow \tilde{z}=\pm 2\sqrt{2}$

e $\tilde{z}^2=i \Longleftrightarrow \tilde{z}^2=e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \tilde{z}_k=e^{i\theta_k}$ con

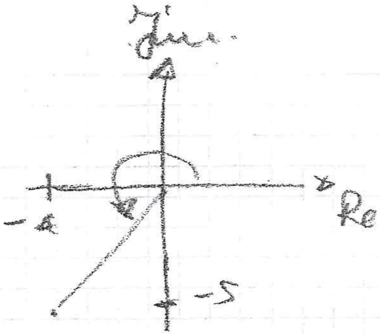
$\theta_k=\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$, $k=0,1$; cioè $\tilde{z}_0=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tilde{z}_1=e^{i\frac{5}{4}\pi}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Passiamo ora a risolvere $z^3+4+5i=0 \Longleftrightarrow z^3=-4-5i$

$|-4-5i| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

$\arg(-4-5i) = \arctan \frac{5}{4} + \pi = \varphi$



Pertanto

$z_k = (\sqrt{41})^{1/3} e^{i\varphi_k}$ con $\varphi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{3}$

con $k = 0, 1, 2$