Esercizio 1

$$f(x)=\int_0^x \arctan(t^2+3|t|-1)\,dt$$ è ben definita su $\mathbb{R}$ perché

$t \longmapsto \arctan(t^2+3|t|-1)$ è continua su $\mathbb{R}$, quindi è localmente Riemann integrabile, quindi $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Inoltre per il primo Teorema fondamentale del calcolo integrale (sull'esistenza delle primitive) f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e per ogni $x\in\mathbb{R}$

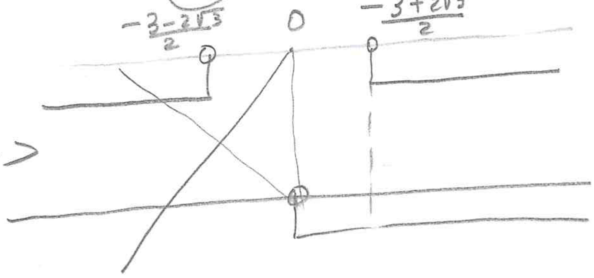
$$f'(x)=\arctan(x^2+3|x|-1).$$

Al fine di determinare gli intervalli di monotonia risolviamo

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+3|x|-1>0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x^2+3x-1>0 \\ x>0\end{cases}}_{\mathrm{I}} \vee \underbrace{\begin{cases} x^2-3x-1>0 \\ x\le 0\end{cases}}_{\mathrm{II}}$$

Risolviamo I

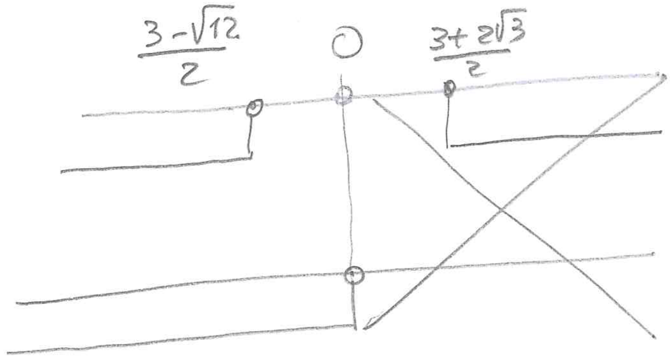
$$\begin{cases} x<\dfrac{-3-\sqrt{12}}{2} \vee x>\dfrac{-3+\sqrt{12}}{2} \\ x>0\end{cases} \Longleftrightarrow$$



Quindi $x>\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}$.

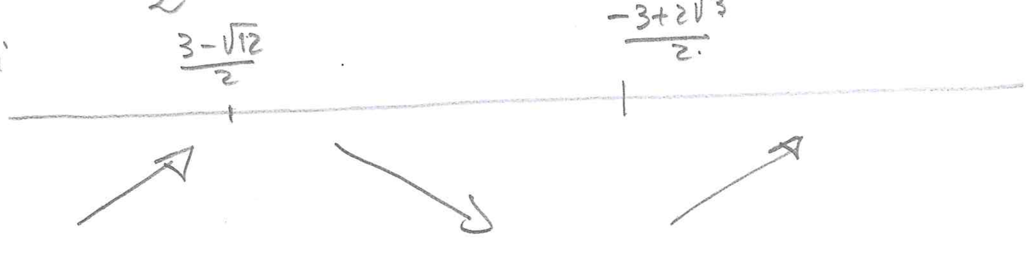
Risolviamo ora II

$$\begin{cases} x<\dfrac{3-\sqrt{12}}{2} \vee x>\dfrac{3+\sqrt{12}}{2} \\ x\le 0\end{cases}$$



Quindi $x<\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}$.

In sintesi



La funzione $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=\arctan\left(x^2+3|x|-1\right)$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ perché composizioni derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Inoltre è continua su tutto $\mathbb{R}$ perché composizione di arctan e $x^2+3|x|-1$ (entrambe continue su $\mathbb{R}$). Possiamo inoltre escludere che f' sia derivabile in 0 perché per ogni $x\neq 0$

$$f''(x)=\frac{1}{1+\left(x^2+3|x|-1\right)^2}\cdot\left(2x+3\,\mathrm{sgn}(x)\right) \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = -\frac{3}{2}\ , \quad \lim_{x\to 0^+} f''(x) = \frac{3}{2}.$$

Quindi, effettivamente f' è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Studiamo la convessità/concavità

$$\begin{cases} f''(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{2x+3\,\mathrm{sgn}\,x}{1+(x^2+3|x|-1)^2}>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x+3\,\mathrm{sgn}\,x>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases} \iff \underbrace{\begin{cases} 2x+3>0 \\ x>0\end{cases}}_{\mathrm{I}} \vee \underbrace{\begin{cases} 2x-3>0 \\ x<0\end{cases}}_{\mathrm{II}}$$

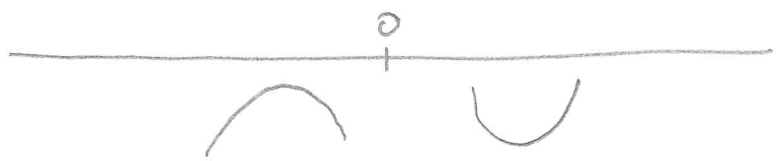
Risolviamo I

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ x>0\end{cases} \iff \begin{cases} x>-\frac{3}{2} \\ x>0\end{cases} \iff x>0;$$

risolviamo II

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ x<0\end{cases} \iff \begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x<0\end{cases} \iff \emptyset.$$

Quindi



cioè f è monotona strettamente crescente in $\left]-\infty, \frac{3-2\sqrt{3}}{2}\right]$,

" " " " " in $\left[\frac{-3+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$;

mentre f è monotona strettamente decrescente in $\left[\frac{3-2\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+2\sqrt{3}}{2}\right]$.

Il punto $\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$ è di massimo relativo, mentre $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ è di minimo relativo.

Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(t^2+3|t|-1)\,dt = +\infty$ perché

$\arctan(t^2+3|t|-1) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ e quindi $\int_0^{+\infty} \arctan(t^2+3|t|-1)\,dt$ è

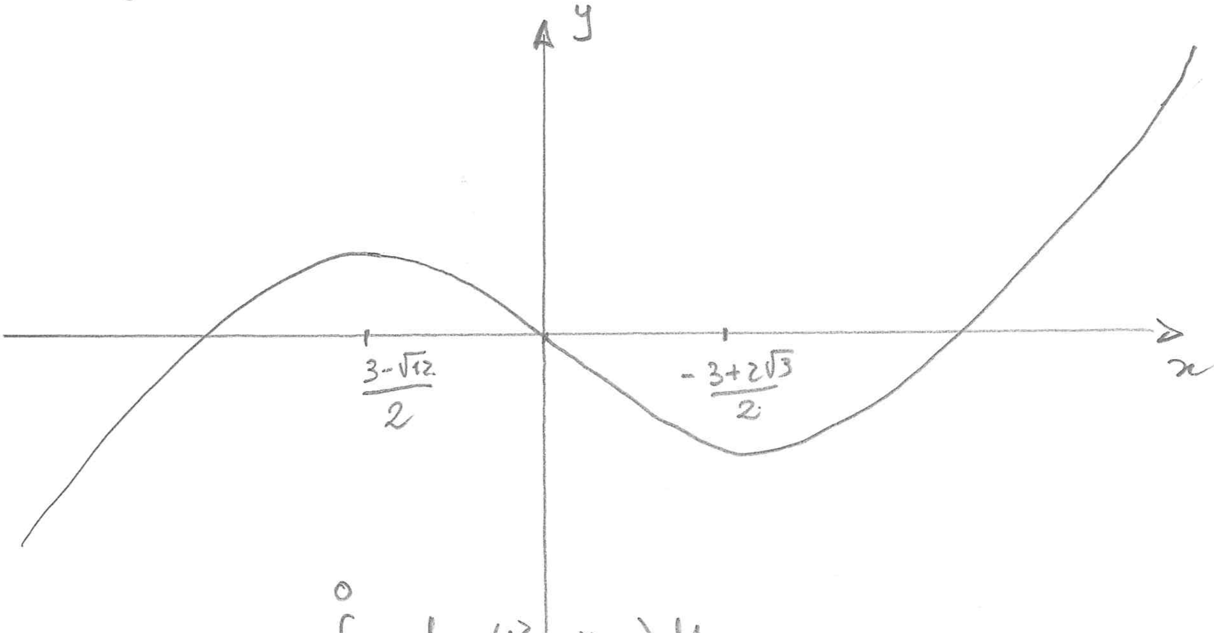
positivamente divergente.

Analogamente $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{0} \arctan(t^2+3|t|-1)\,dt = -\infty$

in quanto $\arctan(t^2+3|t|-1) \underset{t \to -\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2}$, da cui $\int_{-\infty}^{0} \arctan(t^2+3|t|-1)\,dt$

$= -\infty$.

Un primo grafico qualitativo è:

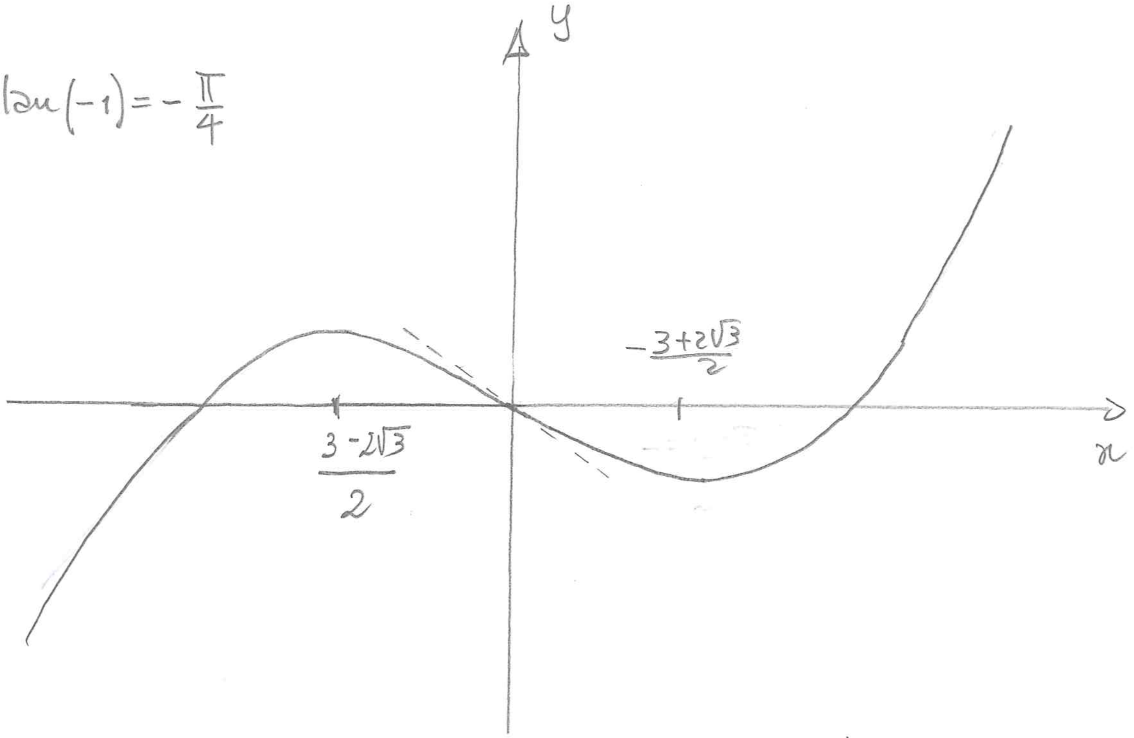


infatti $f(0)=0 = \int_0^0 \arctan(t^2+3|t|-1)\,dt$

cioè f è concava in $]-\infty, 0]$ e convessa in $[0, +\infty[$.

Inoltre 0 è un punto di flesso. Quindi

$f'(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$



L'equazione $f(x) = 0$ in $\mathbb{R}$ ha tre soluzioni.

Es 2 $\quad$ Calcolare $I = \displaystyle\int_{5^2}^{5^3} \frac{\sin(4t)}{\cos^2(4t) - 5^2}\, dt$

posto $s = \cos(4t)$, allora $ds = -4\sin(4t)\,dt$. Quindi

$$I = -\frac{1}{4}\int_{\cos(100)}^{\cos(500)} \frac{ds}{s^2-25}\, ds = -\frac{1}{4}\int_{\cos(100)}^{\cos(500)} \frac{ds}{(s-5)(s+5)}$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$

$$\frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+5} = \frac{1}{s^2-25}\,; \qquad \underline{As} + 5A + \underline{Bs} - 5B = 1\,;$$

$$(A+B)\,s + 5A - 5B = 1 \iff \begin{cases} A+B=0 \\ 5A-5B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ -10B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{10} \\ B=-\frac{1}{10} \end{cases}$$

Pertanto

$$I = -\frac{1}{4}\int_{\cos(100)}^{\cos(500)} \frac{1}{10(s-5)}\, ds + \frac{1}{4}\int_{\cos(100)}^{\cos(500)} \frac{1}{10(s+5)}\, ds$$

$$= -\frac{1}{40}\Big[\log|s-5|\Big]_{s=\cos(100)}^{s=\cos(500)} + \frac{1}{40}\Big[\log|s+5|\Big]_{s=\cos(100)}^{s=\cos(500)}$$

$$= \frac{1}{40}\left(\log\frac{5+\cos(500)}{5+\cos(100)} - \log\frac{5-\cos(500)}{5-\cos(100)}\right)$$

$$= \frac{1}{40}\log\left(\frac{5+\cos(500)}{5+\cos(100)} \cdot \frac{5-\cos(100)}{5-\cos(500)}\right).$$

Esercizio 3 $\exists\, c>0$ t.c. $\forall\, 0<x<c$

$$\frac{\sin^{22}(\alpha x)+x^3}{x^\alpha(1+x^3)} \leq \frac{\left(\sin^{22}(\alpha x)+x^3\right)\left(2+\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)\right)}{x^\alpha(1+x^3)} \leq \frac{3\left(\sin^{22}(\alpha x)+x^3\right)}{x^\alpha(1+x^3)}$$

Quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\sin^{22}(\alpha x)+x^3\right)\left(2+\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)\right)}{x^\alpha(1+x^3)}\,dx$ converge se e solo se converge $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^{22}(\alpha x)+x^3}{x^\alpha(1+x^3)}\,dx$.

Per il criterio del confronto asintotico si ha

$$\frac{\sin^{22}(\alpha x)+x^3}{x^\alpha(1+x^3)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{x^\alpha}.$$

Quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^{22}(\alpha x)+x^3}{x^\alpha(1+x^3)}\,dx$ converge se e solo se converge $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-3}}\,dx$, cioè se e solo se $\alpha-3<1$, ovvero se e solo se $\alpha<4$.

D'altra parte

$$\frac{\left(\sin^{22}(\alpha x)+x^3\right)\left(2+\cos\frac{\alpha}{x}\right)}{x^\alpha(1+x^3)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x^3}{x^\alpha(1+x^3)}$$

$$\sim \frac{2x^3}{x^{\alpha+3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x^\alpha}.$$

Quindi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\left(\sin^{22}(\alpha x)+x^3\right)\left(2+\cos\frac{\alpha}{x}\right)}{x^\alpha(1+x^3)}\,dx$ converge se e solo se converge $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, cioè per ogni $\alpha > 1$.

La conclusione è che l'integrale generalizzato converge se e solo se $\alpha \in]1, 4[$.

Es. 4

Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\cosh^2(4x) - \cos^2(4x)}{(\sin(3x+x^2) - 3x) e^{4x+3}}$

$$N \underset{x\to 0}{\sim} (\cosh(4x) - \cos(4x))(\cosh(4x) + \cos(4x))$$

$$\sim 2\left(\cancel{1} + \frac{(4x)^2}{2} + o(x^3) - \cancel{1} + \frac{(4x)^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$\sim 32x^2$$

$$D \sim \left(\cancel{3x} + x^2 - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3) - \cancel{3x}\right)e^3 \sim x^2 e^3$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh^2(4x) - \cos^2(4x)}{(\sin(3x+x^2) - 3x) e^{4x+3}} = \lim_{x \to 0} \frac{32x^2}{x^2 e^3} = \frac{32}{e^3}$$

Es 5

Sia $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, $a<b$. Se f è derivabile in $]a,b[$ allora esiste $\xi \in]a,b[$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$