Parte A

f è definita su tutto $\mathbb{R}$ perché $x^2+|x|+1>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, inoltre $\frac{3t+7}{t^2+|t|+1}\in C(\mathbb{R})$ per cui per ogni $x\in\mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^0 \frac{3t+7}{t^2+|t|+1}\,dt$$

è ben definita (le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati sono Riemann integrabili)

f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ perché $\log(x^2+|x|+1)$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, in quanto composizione di funzioni derivabili rispettivamente in $]0,+\infty[$ e in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\int_x^0 \frac{3t+7}{t^2+|t|+1}\,dt$ è derivabile in $\mathbb{R}$.

Pertanto f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Inoltre per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f'(x)=\frac{2x+\operatorname{sgn}x}{x^2+|x|+1}-\frac{3x+7}{x^2+|x|+1}=\frac{-x+\operatorname{sgn}x-7}{x^2+|x|+1}$$

Studiamo la monotonia di f determinando gli intervalli in cui f' è positiva

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+\operatorname{sgn}x-3x-7>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+\operatorname{sgn}x-7>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x+1-7>0 \\ x>0\end{cases} \vee \begin{cases} -x-1-7>0 \\ x<0\end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x<-6 \\ x>0\end{cases}}_{=\emptyset} \vee \begin{cases} -8>x \\ x<0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\ ]-\infty,-8[$$

Quindi

f è monotona strettamente crescente in $]-\infty,-8]$;

f è monotona strettamente decrescente in $[-8,0]$ e

f è monotona strettamente decrescente in $[0,+\infty[$.

In particolare la continuità di f su $\mathbb{R}$ implica che f è monotona strettamente decrescente in $[-8,+\infty[$.

Inoltre in -8 si realizza un massimo assoluto per f.

f è derivabile due volte in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ perché f' è quoziente di funzioni derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. In particolare, per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f''(x)=\frac{-(x^2+|x|+1)-(-x+\operatorname{sgn}x-7)(2x+\operatorname{sgn}x)}{(x^2+|x|+1)^2}$$

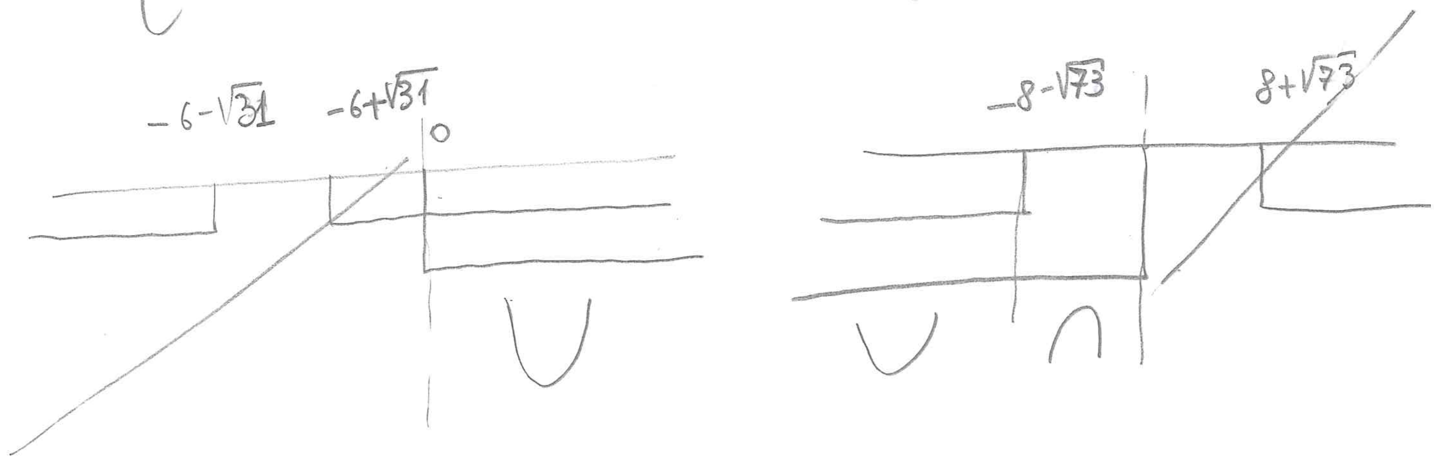
Studiamo il segno di f'' in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\begin{cases} f''(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \iff \begin{cases} 0<-\cancel{x^2}-\cancel{|x|}-1-(-\cancel{2x^2}-\cancel{|x|}+\underset{+}{2|x|}+1-\underset{0}{14x}-7\operatorname{sgn}\ldots \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-2|x|+14x+7\operatorname{sgn}x-2>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-2x+14x+7-2>0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x^2+2x+14x-7-2>0 \\ x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+12x+5>0 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+16x-9>0 \\ x<0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x < -6-\sqrt{31} \ \vee\ x > -6+\sqrt{31} \\ x > 0 \end{cases} \ \vee\ \begin{cases} x < -8-\sqrt{73} \ \vee\ x > 8+\sqrt{73} \\ x < 0 \end{cases}$$



quindi f è convessa in $]-\infty, -8-\sqrt{73}]$ e in $[0,+\infty[$,

f è concava in $[-8-\sqrt{73}, 0]$

Per quanto riguarda l'esistenza di asintoti, calcoliamo

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left\{\log(x^2+|x|+1) + \int_x^0 \frac{3t+7}{t^2+|t|+1}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left\{\log(x^2+|x|+1) + \int_x^{-\frac{7}{3}} \frac{3t+7}{t^2+|t|+1}\,dt + \int_{-\frac{7}{3}}^{0} \frac{3t+7}{t^2+|t|+1}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left\{\log(x^2+|x|+1) + \int_x^{-\frac{7}{3}} \frac{3t+7}{t^2-t+1}\,dt + \int_{-\frac{7}{3}}^{0} \frac{3t+7}{t^2-t+1}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left\{\log(x^2+|x|+1) + \frac{3}{2}\int_x^{-\frac{7}{3}} \frac{2t+\frac{14}{3}}{t^2-t+1}\,dt + \int_{-\frac{7}{3}}^{0} \frac{3t+7}{t^2-t+1}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left\{\log\left(x^2+|x|+1\right)+\frac{3}{2}\Big[\log(t^2-t+1)\Big]_{t=x}^{t=-\frac{7}{3}}+\frac{3}{2}\int_x^{-\frac{7}{3}}\frac{\frac{14}{3}-1}{t^2-t+1}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{-\frac{7}{3}}^{0}\frac{3t+7}{t^2-t+1}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left\{\log(x^2+|x|+1)+\frac{3}{2}\log\left(\frac{49}{9}+\frac{7}{3}+1\right)-\frac{3}{2}\log(x^2-x+1)\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}\int_x^{-\frac{7}{3}}\frac{\frac{11}{3}}{t^2-t+1}\,dt+\int_{-\frac{7}{3}}^{0}\frac{3t+7}{t^2-t+1}\,dt\right\}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)}_{-\infty}+\frac{3}{2}\log\left(\frac{79}{9}\right)+\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{11}{3}\int_{-\infty}^{-\frac{7}{3}}\frac{1}{t^2-t+1}\,dt}_{\text{converge xché } \frac{1}{t^2-t+1}\sim\frac{1}{t^2}}+\underbrace{\int_{-\frac{7}{3}}^{0}\frac{3t+7}{t^2-t+1}\,dt}_{\text{numero}}$$

$$= -\infty.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(\log x^2+|x|+1\right)+\int_x^0\frac{3t+7}{t^2+|t|+1}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left\{\log(x^2+|x|+1)+\frac{3}{2}\int_x^0\frac{2t+\frac{14}{3}}{t^2+|t|+1}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left(x^2+|x|+1\right)+\frac{3}{2}\Big[\log(t^2+t+1)\Big]_{t=x}^{t=0}+\frac{3}{2}\int_x^0\frac{\frac{11}{3}}{t^2+|t|+1}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left\{ \log(x^2+|x|+1) + \frac{3}{2}\log 1 - \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{11}{2}\int_x^0 \frac{1}{t^2+|t|+1}\,d \right.$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{11}{2}\int_{+\infty}^0 \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$$

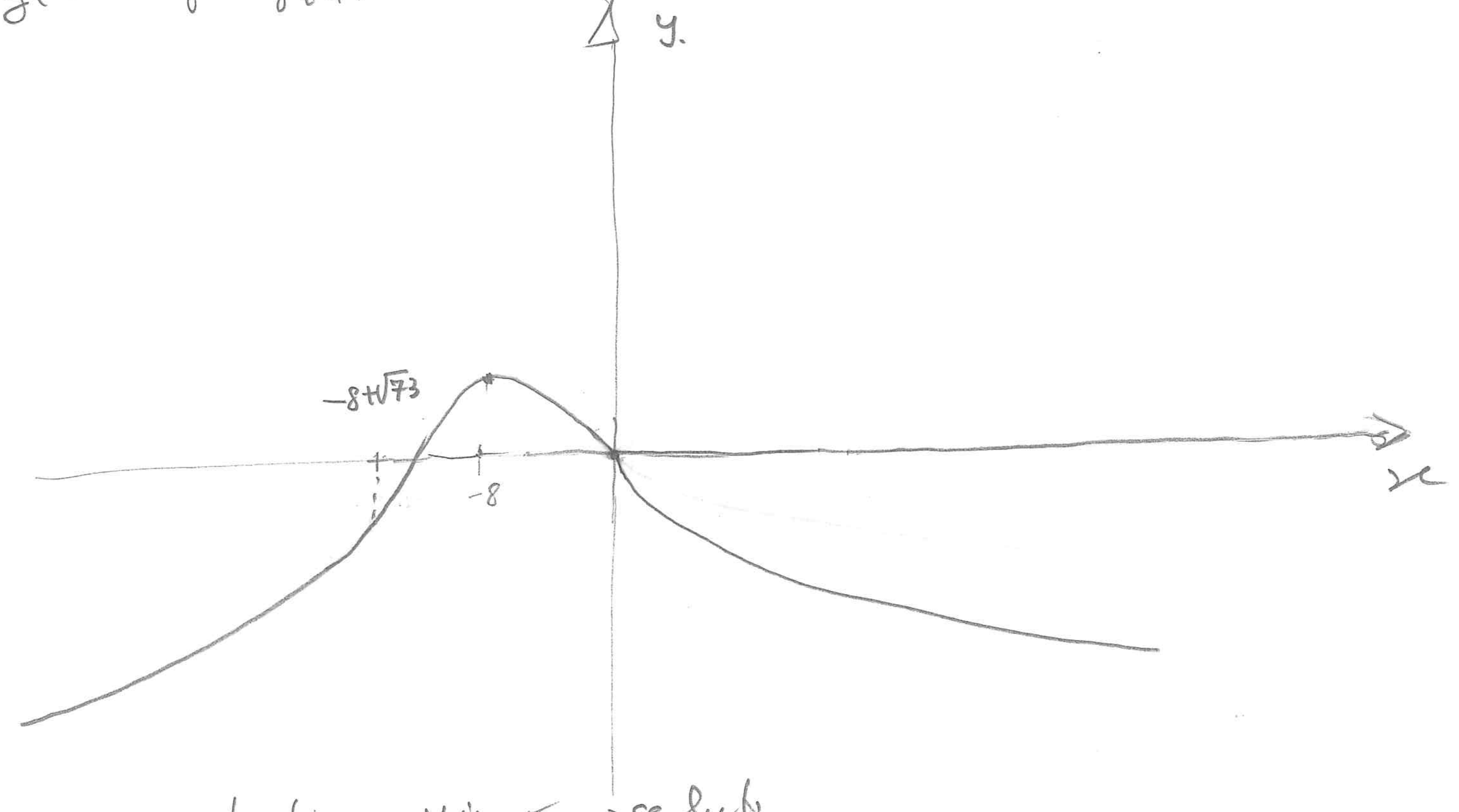
↑ converge perché $\frac{1}{t^2+t+1} \sim \frac{1}{t^2}$

$$= -\infty$$

Quindi non ci sono asintoti obliqui

Il grafico è il seguente:

$$f(0) = \log 1 + \int_0^0 \frac{3t+7}{t^2+|t|+1}\,dt = 0$$



-8 punto di massimo assoluto

0 punto angoloso

$-8+\sqrt{73}$ punto dove si realizza un flesso

Parte B

Es 2.

$$I = \int_3^9 \sqrt{t+3}\, e^{\sqrt{t+3}}\, dt = 2\int_3^9 \frac{(\sqrt{t+3})^2}{2\sqrt{t+3}}\, e^{\sqrt{t+3}}\, dt$$

Pongo $\sqrt{t+3} = s$ $\qquad ds = \frac{1}{2\sqrt{t+3}}\, dt$

$$I = 2\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} s^2 e^s\, ds \underset{\text{per parti}}{=} 2\left[e^s s^2\right]_{s=\sqrt{6}}^{s=\sqrt{12}} - 2\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} 2s e^s\, ds$$

$$= 2e^{\sqrt{12}}\cdot 12 - 2e^{\sqrt{6}}\cdot 6 - 4\left[s e^s\right]_{s=\sqrt{6}}^{s=\sqrt{12}} + 4\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} e^s\, ds$$

$$= \underline{24e^{\sqrt{12}}} - 12e^{\sqrt{6}} - 4\cdot\underline{\sqrt{12}e^{\sqrt{12}}} + 4\sqrt{6}e^{\sqrt{6}} + \underline{4e^{\sqrt{12}}} - 4e^{\sqrt{6}}$$

$$= 4(7-\sqrt{12})e^{\sqrt{12}} - 4(4-\sqrt{6})e^{\sqrt{6}}.$$

ES. 3

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}\sin\left(\frac{1}{7+x^{\frac{1}{x}}}\right)}{x^{\frac{2}{x}}+7}\, dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}\sin\left(\frac{1}{7+x^{1/x}}\right)}{x^{\frac{2}{x}}+7}\, dx$$

$$+ \int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}\sin\left(\frac{1}{7+x^{1/x}}\right)}{x^{2/x}+7}\, dx$$

Se $x \to 0^+$, $\quad \dfrac{\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}\sin\frac{1}{7+x^{1/x}}}{x^{\frac{2}{x}}+7} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{7x^{\frac{7}{2}}}\cdot\sin\dfrac{1}{7}$

Quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\frac{1}{x^{7/\alpha}}\sin\left(\frac{1}{7+x^{1/\alpha}}\right)}{x^{2/\alpha}+7}\,dx$ converge (per $\alpha>0$) se e solo se

$\frac{7}{\alpha}<1$, cioè $7<\alpha$.

Se $x\to+\infty$, allora $\displaystyle\frac{\frac{1}{x^{7/\alpha}}\sin\frac{1}{7+x^{1/\alpha}}}{x^{2/\alpha}+7} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{x^{7/\alpha}}\cdot\frac{1}{x^{1/\alpha}}}{x^{2/\alpha}}$

(perché $\sin\frac{1}{7+x^{1/\alpha}}\sim\frac{1}{x^{1/\alpha}}$, per $x\to+\infty$)

$\displaystyle\sim \frac{1}{x^{8/\alpha+2/\alpha}}\sim\frac{1}{x^{\frac{10}{\alpha}}}$ Pertanto

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^{7/\alpha}}\sin\left(\frac{1}{7+x^{1/\alpha}}\right)}{x^{2/\alpha}+7}\,dx$ converge per $\alpha>0$,

se e solo se $\frac{10}{\alpha}>1$, cioè per $\alpha<10$.

Concludiamo allora che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^{7/\alpha}}\sin\left(\frac{1}{7+x^{1/\alpha}}\right)}{x^{\frac{2}{\alpha}}+7}\,dx.$$

converge se e solo se $7<\alpha<10$.

Es 3

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x^2+5x)+\sin(x^2-5x)-2x^2}{x\left(\cos(x^2+2x)-1\right)e^{5x+2}}$$

$$N \underset{x\to 0^+}{\sim} \cancel{x^2}+\cancel{5x}+\frac{(5x)^3}{3!}+o(x^3)+\cancel{x^2}-\cancel{5x}+\frac{(5x)^3}{3!}+o(x^3)-\cancel{2x^2} \sim \frac{5^3}{3}x^3$$

(infatti $\sinh(t) \sim t+\frac{t^3}{3!}$ e $\sin t \sim t-\frac{t^3}{3!}$)

$$D \sim x\left(\cancel{1}-\frac{(x^2+2x)^2}{2}+o(x^2)\cancel{-1}\right)e^2 \sim -2x^3 e^2$$

(infatti $e^{5x+2} \underset{x\to 0}{\sim} e^2$).

Quindi
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{5^3}{3}\cancel{x^3}}{-2\cancel{x^3}e^2} = -\frac{125}{6e^2}$$

Es 5 (non utile per l'ammissione alle fasi C e D)

Sia $f \in C(I,\mathbb{R})$, I intervallo, $I \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $\varphi \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ t.c. $\varphi([\alpha,\beta]) \subset I$.
Allora
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,ds.$$