Esercizio 1

$$f(x) = e^{\int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5}\,dt}$$

La funzione $t \longmapsto \frac{1}{t^2+3|t|+5}$ è continua su $\mathbb{R}$, infatti $t^2+3|t|+5$ è continua su $\mathbb{R}$ e $t^2+3|t|+5 \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ perché $\Delta = 9-20 = -16 < 0$ sia per $t>0$ che per $t<0$.

Inoltre $t \longmapsto \frac{1}{t^2+3|t|+5}$ è derivabile per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ricordando il Teorema fondamentale del calcolo integ. sull'esist. delle primitive: $x \longmapsto \int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5}\,dt$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione assegnata è composizione tra la funzione esponenziale e $x \mapsto \int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5}\,dt$, quindi per il Teorema di derivabilità delle funzioni composte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e f è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{\int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5}\,dt} \frac{1}{(x-5)^2+3|x-5|+5}.$$

D'altra parte $f'(x) > 0 \iff \frac{1}{(x-5)^2+3|x-5|+5} > 0.$

Come già osservato, se $x-5=s$, $\frac{1}{s^2+3|s|+5} > 0 \iff s^2+3|s|+5>0$

In particolare $s^2+3|s|+5>0$ se e solo se $s \in \mathbb{R}$. Perché se $s>0$, allora $s^2+3s+5>0$ se e solo se $s \in \mathbb{R}$

Inoltre, se $s \leq 0$, allora $s^2-3s+5>0$ se e solo se $s \in \mathbb{R}$.

Pertanto f è strettamente monotona crescente in $\mathbb{R}$. Non esistono p.ti estrem.

La derivata seconda di f è definita dove esiste la derivata prima di f'. La funzione f' è definita su $\mathbb{R}$, ma è ulteriormente derivabile solo per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Quindi $D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ e

$$f''(x) = e^{\int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt} \frac{1}{\left((x-5)^2+3|x-5|+5\right)^2} - e^{\int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt} \frac{2(x-5)+3\,\mathrm{sgn}(x-5)}{\left((x-5)^2+3|x-5|+5\right)^2}$$

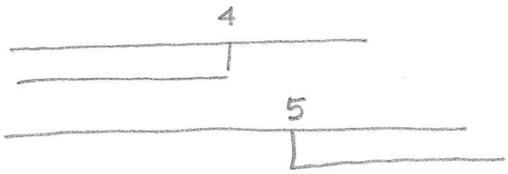
$$= \frac{e^{\int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt}}{\left((x-5)^2+3|x-5|+5\right)^2} \left(1 - 2(x-5) - 3\,\mathrm{sgn}(x-5) \right)$$

Studiamo il segno di f''

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \end{cases} \iff \begin{cases} 1-2(x-5)-3\,\mathrm{sgn}(x-5) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \end{cases} \iff$$

$$\underset{\text{I}}{\begin{cases} 1-2(x-5)-3 > 0 \\ x > 5 \end{cases}} \vee \underset{\text{II}}{\begin{cases} 1-2(x-5)+3 > 0 \\ x < 5 \end{cases}}$$

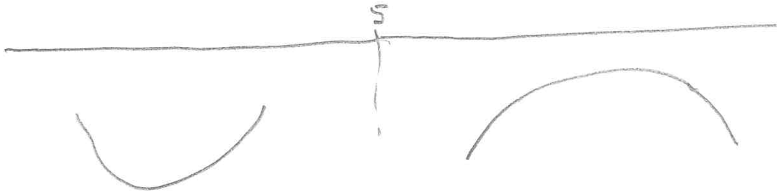
Nel caso I $\begin{cases} -2 > 2(x-5) \\ x > 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 > x-5 \\ x > 5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 4 > x \\ x > 5 \end{cases} \iff$  $S = \emptyset$

Nel caso II $\begin{cases} 4 > 2(x-5) \\ x < 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 > x-5 \\ x < 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 7 > x \\ x < 5 \end{cases}$ 

$S =]-\infty, 5[$.

Pertanto



Cioè f è convessa in $]-\infty, 5]$ e concava in $[5, +\infty[$.

In 5 c'è un punto di flesso, perché f è derivabile in 5.

Calcoliamo $\lim_{x \to +\infty} e^{\int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt} = e^{\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt} \in \mathbb{R}$

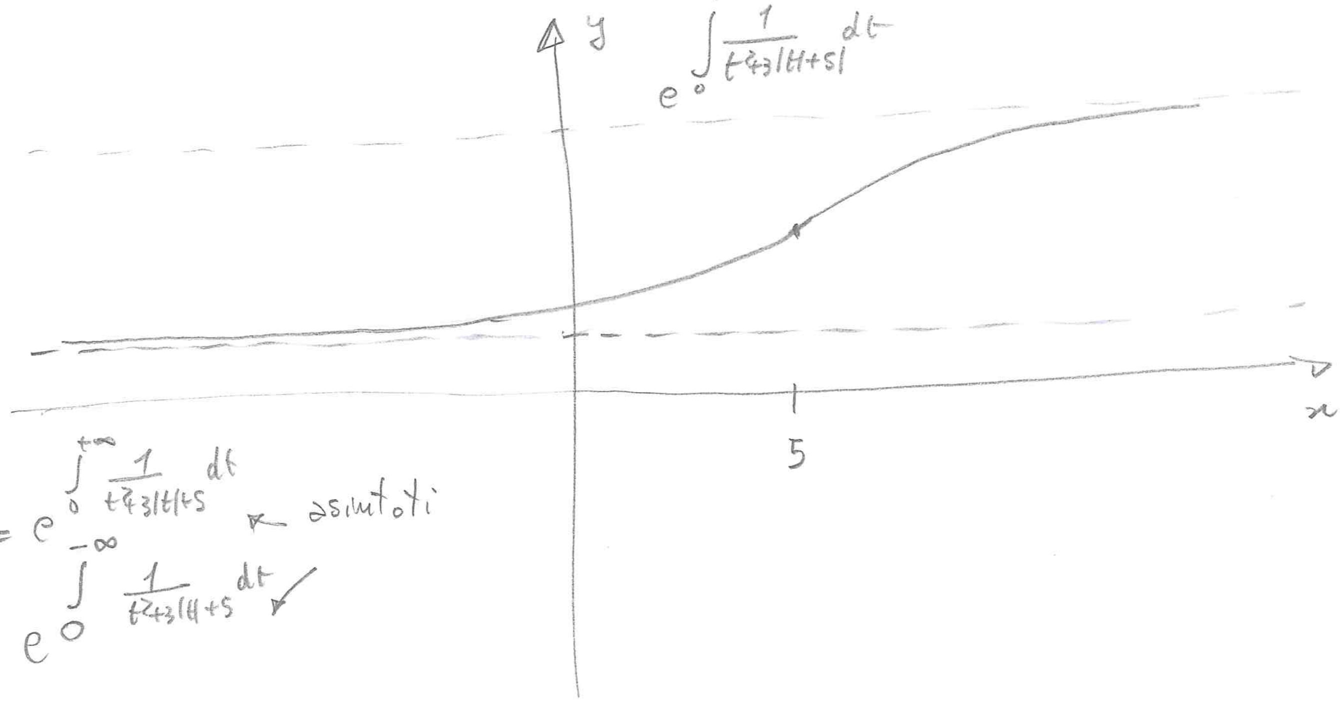
perché $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt \in \mathbb{R}$. Infatti l'integrale è convergente

perché $\frac{1}{t^2+3|t|+5} \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to +\infty$.

Analogamente $\lim_{x \to -\infty} e^{\int_0^{x-5} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt} = e^{\int_0^{-\infty} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt} \in \mathbb{R}$

Infatti $\int_0^{-\infty} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt = -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt$ e $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt \in \mathbb{R}$,

cioè converge, perché $\frac{1}{t^2+3|t|+5} \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to -\infty$.



$y = e^{\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt}$ ← asintoti

$y = e^{\int_0^{-\infty} \frac{1}{t^2+3|t|+5} dt}$ ↗

Es 2. Calcolare $I=\displaystyle\int_4^{7}\frac{7x(x^2+4)}{\sqrt{x^2+7}}\,dx$

posto $\sqrt{x^2+7}=t$ $\quad dt=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}\,dx$; $x^2+7=t^2$; $x^2+4=t^2-3$

$$I=7\int_{\sqrt{23}}^{\sqrt{56}}(t^2-3)\,dt=7\left[\frac{1}{3}t^3-3t\right]_{t=\sqrt{23}}^{t=\sqrt{56}}=7\left(\frac{1}{3}(56)^{3/2}-3\sqrt{56}-\frac{1}{3}(23)^{3/2}+3\sqrt{23}\right)$$

Es 3 Det. $\alpha>0$ t.c. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}+x^{\alpha}}{x^{\alpha}(4+\alpha x)}\,dx<+\infty$

$$\frac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}+x^{\alpha}}{x^{\alpha}(4+\alpha x)}\underset{x\to 0}{\sim}\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \dfrac{4}{\alpha}>\alpha, \text{ converge se } \alpha<2\\[2ex] \dfrac{\alpha^{\frac{4}{\alpha}}+1}{4}, & \dfrac{4}{\alpha}=\alpha, \text{ converge se } \alpha=2\\[2ex] \dfrac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}}{4x^{\alpha}}, & \dfrac{4}{\alpha}<\alpha, \text{ converge se } \begin{cases}\alpha<-2 \vee \alpha>2\\ (\alpha>0)\\ \alpha-\frac{4}{\alpha}<1\end{cases}\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}\alpha>2\\ \alpha^2-\alpha-4<0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\alpha>2\\ \alpha<\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$2<\alpha<\frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

Quindi $\displaystyle\int_0^{1}\frac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}+x^{\alpha}}{x^{\alpha}(4+\alpha x)}\,dx<+\infty \iff 0<\alpha<\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

Analogamente

$$\frac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}+x^{\alpha}}{x^{\alpha}(4+\alpha x)}\underset{x\to +\infty}{\sim}\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha x}, & \alpha>\dfrac{4}{\alpha}, \quad (i): \begin{cases}\alpha^2>4\\ 1>1\end{cases} : S=\emptyset\\[2ex] \dfrac{1+\alpha^{\frac{4}{\alpha}}}{\alpha x}, & \alpha=\dfrac{4}{\alpha} \quad (ii): \begin{cases}\alpha=2\\ 1>1\end{cases} \quad S=\emptyset\\[2ex] \dfrac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}}{x^{1+\alpha}}, & \dfrac{4}{\alpha}>\alpha \quad (iii): \begin{cases}1+\alpha-\frac{4}{\alpha}>1\\ -2<\alpha<2\end{cases}\end{cases}$$

Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}+x^\alpha}{x^\alpha(4+\alpha x)}dx \overset{\text{converge}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\vee$ (ii) $\vee$ (iii). $\Longleftrightarrow$ (iii)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha-\frac{4}{\alpha}>0 \\ -2<\alpha<2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha<-2 \vee \alpha>2 \\ -2<\alpha<2 \end{cases} \Longleftrightarrow \phi$$

Ovvero $\int_1^{+\infty} \frac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}+x^\alpha}{x^\alpha(4+\alpha x)}dx$ non converge.

Pertanto possiamo concludere che $\int_0^{+\infty} \frac{(\alpha x)^{\frac{4}{\alpha}}+x^\alpha}{x^\alpha(4+\alpha x)}dx$ <u>non converge</u>

per $\alpha>0$.

<u>Es. 4.</u>

$$N \sim \left(\cancel{1}+\cancel{8x}+\cancel{\frac{(8x)^2}{2}}+\frac{(8x)^3}{3!}+o(x^3)-\cancel{1}-\cancel{\frac{(8x)^2}{2}}+o(x^3)-\cancel{8x}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2^8}{3}x^3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D \sim \cancel{3x}-\cancel{\frac{(3x)^2}{2}}+\frac{(3x)^3}{3}+o(x^3)-\cancel{3x}+\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^4)+\cancel{\frac{9x^2}{2}} \sim \frac{3^3}{2}x^3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{N}{D} = \frac{\frac{2^8\cdot\sqrt{2}}{6}}{\frac{3^3}{2}} = \frac{2^8\sqrt{2}}{3^4}$$

<u>Es.</u> (Domanda

$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}\in\mathbb{N}: \ |x_n-\alpha|<\varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>\bar{n}$