1

f è correttamente definita su tutto $\mathbb{R}$. Infatti $t \longmapsto e^{-(t-3)^2} \in C(\mathbb{R})$, quindi $t \longmapsto e^{-(t-3)^2}$ è localmente Riemann integrabile in $\mathbb{R}$, mentre $x \longmapsto e^{-(x-3)^2}|x-3| \in C(\mathbb{R})$ perché prodotto di funzioni continue definite su $\mathbb{R}$.

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale $x \longmapsto \int_3^x e^{-(t-3)^2} dt$ è derivabile in $\mathbb{R}$, mentre $x \longmapsto e^{-(x-3)^2}|x-3|$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, perché prodotto di funzioni derivabili rispettivamente in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Quindi f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, mentre è continua in $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata prima; per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$f'(x) = -2(x-3)e^{-(x-3)^2}|x-3| + \operatorname{sgn}(x-3) \cdot e^{-(x-3)^2} - e^{-(x-3)^2}$$

$$= e^{-(x-3)^2}\left(-2(x-3)|x-3| + \operatorname{sgn}(x-3) - 1\right)$$

Quindi

$$\begin{cases} f' > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2(x-3)|x-3| + \operatorname{sgn}(x-3) - 1 > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \end{cases}$$

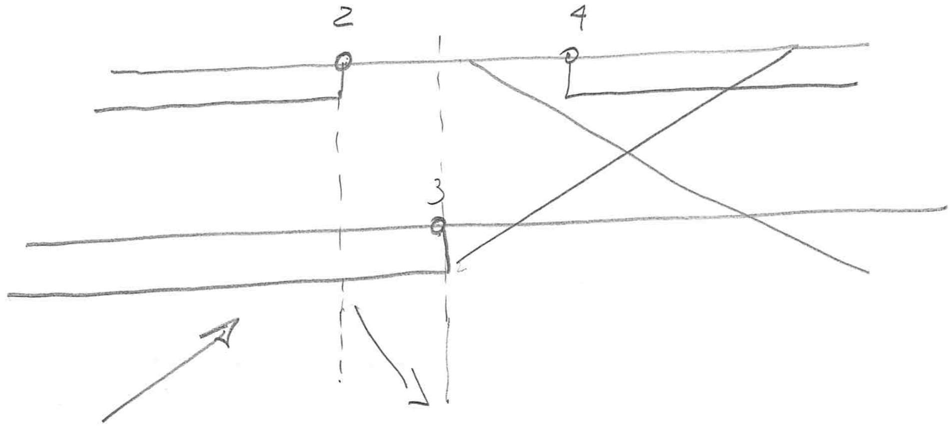
$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} -2(x-3)^2 + 1 - 1 > 0 \\ x > 3 \end{cases}}_{\mathrm{I}} \vee \underbrace{\begin{cases} 2(x-3)^2 - 2 > 0 \\ x < 3 \end{cases}}_{\mathrm{II}}$$

I $$\begin{cases} -2(x-3)^2 > 0 \\ x > 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \emptyset \quad \left(-2(x-3)^2 \text{ è negativo per ogni } x \neq 3\right).$$

II

$$\begin{cases} 2(x-3)^2-2>0 \\ x<3 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)^2-1>0 \\ x<3 \end{cases} \iff \begin{cases} x-3<-1 \vee x-3>1 \\ x<3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x<2 \vee x>4 \\ x<3 \end{cases}$$



$$\iff \quad x<2 .$$

Pertanto f è monotona strettamente crescente in $]-\infty, 2]$, mentre è monotona strettamente decrescente in $[2, 3]$ e in $[3,+\infty[$. Quindi, per la continuità di f in $\mathbb{R}$ si ha che f è monotona strettamente decrescente in $[2,+\infty[$.

Inoltre in 2 si ha un punto di massimo assoluto per f.

La funzione f' è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ perché ottenuta come prodotto e somme di funzioni al più derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$f''(x) = -2(x-3)\, e^{-(x-3)^2}\left(-2(x-3)|x-3| + \operatorname{sgn}(x-3) - 1\right) + e^{-(x-3)^2}\left(-2|x-3| - 2(x-3)\operatorname{sgn}(x\ldots\right.$$

$$= -2(x-3)e^{(x-3)^2}\left(-2(x-3)|x-3| + \operatorname{sgn}(x-3) - 1\right) + e^{-(x-3)^2}\left(-2|x-3| - 2|x-3|\right)$$

$$= e^{(x-3)^2}\left(4(x-3)^2|x-3| - 2|x-3| + 2(x-3) - 4|x-3|\right)$$

$$= 2e^{(x-3)^2}(x-3)\left(2(x-3)|x-3| - 3\operatorname{sgn}(x-3) + 1\right).$$

Studiamo il segno di f'' in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-3)\left(2(x-3)|x-3| - 3\,\mathrm{sgn}(x-3) + 1\right) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \end{cases}$$

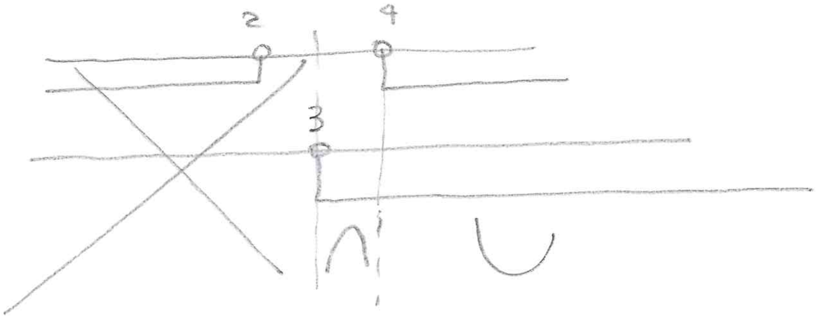
$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} (x-3)\left(2(x-3)|x-3| - 3\,\mathrm{sgn}(x-3) + 1\right) > 0 \\ x > 3 \end{cases}}_{\mathrm{I}} \vee \underbrace{\begin{cases} (x-3)\left(2(x-3)|x-3| - 3\,\mathrm{sgn}(x-3) + 1\right) \\ x < 3 \end{cases}}_{\mathrm{II}}$$

Risolviamo

$$\mathrm{I} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2(x-3)^2 - 3 + 1 > 0 \\ x > 3 \end{cases} \quad (\text{perché } x-3>0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2(x-3)^2 - 2 > 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

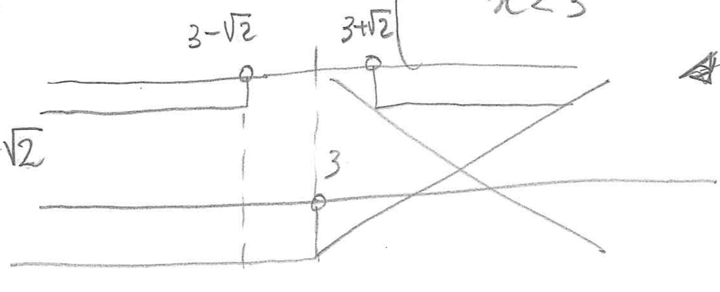
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-3 < -1 \ \vee\ x-3 > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 2 \ \vee\ x > 4 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x > 4$$



$$\mathrm{II} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2(x-3)^2 + 3 + 1 < 0 \\ x < 3 \end{cases} \quad (\text{nota bene } x-3<0 \text{ in questo caso})$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 > 2 \\ x < 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-3 < -\sqrt{2} \ \vee\ x-3 > \sqrt{2} \\ x < 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 3-\sqrt{2} \ \vee\ x > 3+\sqrt{} \\ x < 3 \end{cases}$$



$$\Longleftrightarrow \quad x < 3-\sqrt{2}$$

Quindi f è convessa in $]-\infty, 3-\sqrt{2}]$ e in $[4, +\infty[$,
mentre è concava in $[3-\sqrt{2}, 3]$ e in $[3, 4]$.

I punti $3-\sqrt{2}$ e 4 sono punti di flesso.

Procediamo con l'analisi degli eventuali asintoti.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty}\int_3^x e^{-(t-3)^2}dt = -\int_3^{+\infty} e^{-(t-3)^2}dt = -\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds \in \mathbb{R},$$
negativo.

Infatti $\lim_{x\to+\infty} e^{-(x-3)^2}|x-3| = 0$, mentre $\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds$ è convergente

(infatti $e^{-s^2} < e^{-s}$, per ogni $s > 1$). Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{(non richiesto)}$$

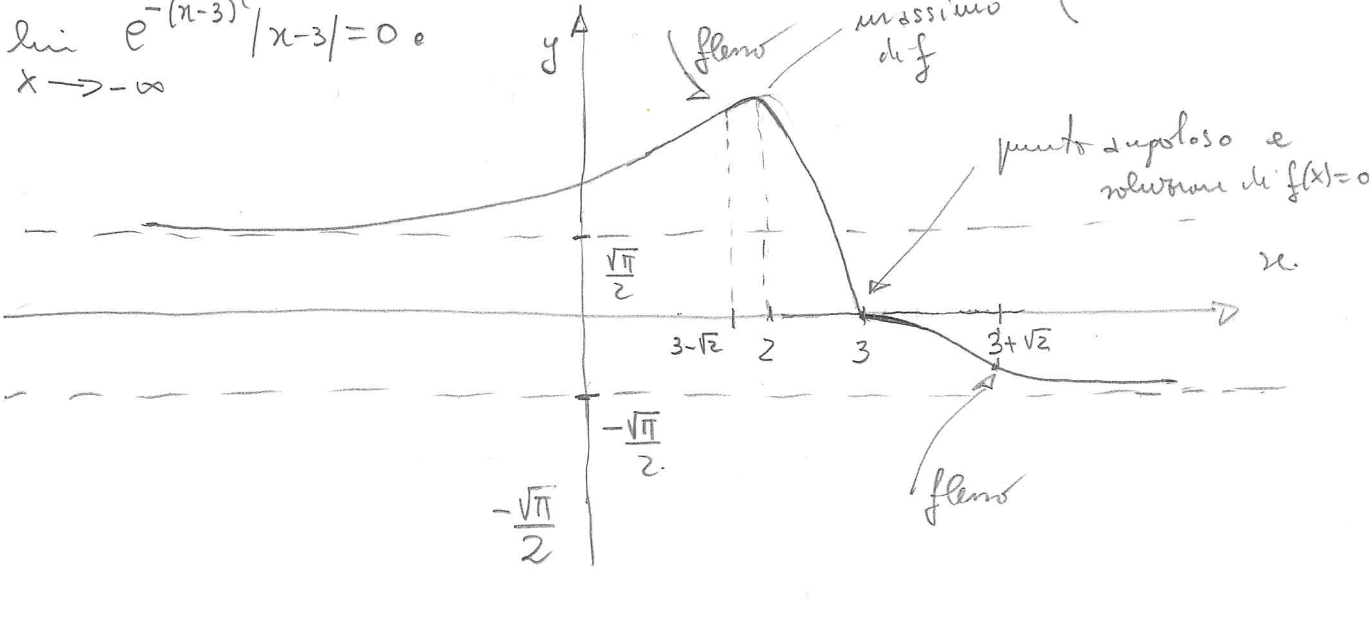
Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\int_3^x e^{-(t-3)^2}dt = -\int_3^{-\infty} e^{-(t-3)^2}dt = \int_{-\infty}^3 e^{-(t-3)^2}dt \in \mathbb{R}$$

con $\int_{-\infty}^3 e^{-(t-3)^2}dt > 0$ e $\int_{-\infty}^3 e^{-(t-3)^2}dt = \int_{-\infty}^0 e^{-s^2}ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(non richiesto)

perché $\lim_{x\to-\infty} e^{-(x-3)^2}|x-3| = 0$.



Quindi $y=\int_{-\infty}^{3} e^{-(t-3)^2}dt$ e $y=-\int_{3}^{+\infty} e^{-(t-3)^2}dt$ sono le equazioni dei due asintoti orizzontali rispettivamente per $x\to-\infty$ e per $x\to+\infty$.

La soluzione di $f(x)=0$ è $x=3$, l'unico valore per cui f si annulla.

Es. 2

$$I=\int_0^{\frac{4^{-1}\pi}{2}} \frac{\sin(4t)\cos(4t)}{\cos^2(4t)-9\cos(4t)+20}\,dt = -\frac{1}{4}\int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{\pi}{2})} \frac{s}{s^2-9s+20}\,ds = \int_0^1 \frac{s}{s^2-9s+20}\,ds$$

$\cos(4t)=s \qquad ds=-4\sin(4t)$, si noti che $s^2-9s+20$ $=(s-4)(s-5)$ quindi $\frac{s}{s^2-9s+20}\in C([0,1],\mathbb{R})$. Allora

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2s}{s^2-9s+20}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2s-9+9}{s^2-9s+20}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2s-9}{s^2-9s+20}\,ds+\frac{9}{2}\int_0^1\frac{1}{s^2-9s+20}\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|s^2-9s+20|\Big]_{s=0}^{s=1}+\frac{9}{2}\int_0^1\frac{1}{(s-4)(s-5)}\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\log|1-9+20|-\frac{1}{2}\log 20+\frac{9}{2}\int_0^1\frac{A}{s-4}\,ds+\frac{9}{2}\int_0^1\frac{B}{s-5}\,ds$$

con $\frac{A}{s-4}+\frac{B}{s-5}=\frac{1}{(s-4)(s-5)} \iff \frac{As-5A+Bs-4B}{(s-4)(s-5)}=\frac{1}{(s-4)(s-5)}$

$$\iff \begin{cases}A+B=0\\-5A-4B=1\end{cases} \iff \begin{cases}A=-B\\5B-4B=1\end{cases} \iff \begin{cases}A=-B\\B=1\end{cases} \iff \begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}$$

Allora $I = \frac{1}{2}\log 12 - \frac{1}{2}\log 20 - \frac{9}{2}\left[\log|s-4|\right]_{s=0}^{s=1} + \frac{9}{2}\left[\log|s-5|\right]_{s=0}^{s=1}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{12}{20} - \frac{9}{2}\left(\log|1-4| - \log|-4|\right) + \frac{9}{2}\left(\log|1-5| - \log|-5|\right)$

$= \frac{1}{2}\log\frac{3}{5} - \frac{9}{2}\log\frac{3}{4} + \frac{9}{2}\log\frac{4}{5} = \frac{1}{2}\log\frac{3}{5} - \frac{9}{2}\log\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)$

$= \log\sqrt{\frac{3}{5}} - \log\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{9}{2}} = \log\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{16}{15}\right)^{\frac{9}{2}}\right) = \log\sqrt{\frac{16^9}{3^8\cdot 5^{10}}}$

Es.3

Se $x \to 0^+ \Rightarrow \frac{\sin(7x^\alpha)}{x^{7\alpha}+x^7} \sim \frac{7x^\alpha}{x^{7\alpha}+x^7} \sim \begin{cases} \frac{7x^\alpha}{x^{7\alpha}}, & 7\alpha<7 \\ \frac{7x^\alpha}{2x^7}, & 7\alpha=7 \\ \frac{7x^\alpha}{x^7}, & 7\alpha>7 \end{cases}$

Se $\begin{cases} 7\alpha<7 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha<1 \\ \alpha>0 \end{cases}$ allora $\int_0^1 \frac{\sin 7x^\alpha}{x^{7\alpha}+x^7}ds$ converge se $6\alpha<1$

quindi $\begin{cases} \alpha<1 \\ \alpha>0 \\ \alpha<\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{0<\alpha<\frac{1}{6}}$.

Se $\begin{cases} 7\alpha=7 \\ \alpha>0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin(7x)}{x^7+x^7}dx$ non converge perché $\frac{7x}{2x^7} = \frac{7}{2x^6}$

Se $\begin{cases} 7\alpha>7 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \alpha>0 \end{cases}$ allora $\int_0^1 \frac{\sin 7x^\alpha}{x^{7\alpha}+x^7}ds$ converge se

e solo se $\begin{cases} 7-\alpha<1 \\ \alpha>1 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha>6}$

Pertanto $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(7x^\alpha)}{x^{7\alpha}+x^7}\,dx$ converge per $\alpha>0$ se e solo se

$\alpha \in \left]0,\frac{1}{6}\right[\cup \left]6,+\infty\right[$.

Nel caso $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(7x^\alpha)}{x^{7\alpha}+x^7}\,dx$ osserviamo che $\sin(7x^\alpha)$

non ha definitivamente un segno. Quindi studiamo la convergenza assoluta. In particolare

$$\left|\frac{\sin(7x^\alpha)}{x^{7\alpha}+x^7}\right| \leq \frac{1}{x^{7\alpha}+x^7} \leq \frac{1}{x^7}\ , \quad \text{per ogni } x \geq 1$$

Quindi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(7x^\alpha)}{x^{7\alpha}+x^7}\,dx$ è convergente per ogni $\alpha>0$

perché $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(7x^\alpha)|}{|x^{7\alpha}+x^7|}\,dx$ è convergente per ogni $\alpha>0$,

cioè $\dfrac{\sin(7x^\alpha)}{x^{7\alpha}+x^7}$ è assolutamente int. in senso generalizzato in $[1,+\infty[$.

Concludiamo allora che per $\alpha>0$ l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(7x^\alpha)}{x^{7\alpha}+x^7}\,dx$$

converge se e solo se $\alpha \in \left]0,\frac{1}{6}\right[\cup \left]6,+\infty\right[$.

Es 4

$$N \sim \left(\cancel{1} + \cancel{4x} + \cancel{\frac{(4x)^2}{2}} + \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^4}{4!} + o(x^4) - \cancel{1} - \cancel{\frac{(4x)^2}{2}} - \frac{(4x)^4}{4!} + o(x^4) - 4x\right)$$

$$\cdot\, x^2 \qquad \text{per } x \to 0.$$

per

Da ciò segue

$$N \sim \frac{(4x)^5}{6}, \quad \text{per } x \to 0.$$

Inoltre

$$D \sim \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{(5x)^2}{2} + o(x^2)\right)\left(\cancel{5x} - \cancel{5x} + \frac{(5x)^3}{3!} + o(x^3)\right)$$

$$\sim \frac{(5x)^2}{2} \cdot \frac{(5x)^3}{6} \sim \frac{5^5 \cdot x^5}{12} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0} \frac{(4x)^5}{6} \cdot \frac{12}{5^5 \cdot x^5} = \frac{4^5 \cdot 12}{6 \cdot 5^5} = \frac{2^{11}}{5^5}.$

Es. 5

Sia $x_0 \in D(I)$ con $f: I \to \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I \setminus \{x_0\},\ \text{se } \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0,$$

$$\text{allora } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$