(1)

$$f(x)=e^{-(x-3)^2}+\int_x^3 e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt$$

f è definita su $\mathbb{R}$, perché $t \longmapsto e^{-(t-3)^2}|t-2| \in C(\mathbb{R})$; quindi per ogni $x\in\mathbb{R}$, $\int_x^3 e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt \in \mathbb{R}$.

Inoltre $f\in C^1(\mathbb{R})$, perché $e^{-(x-3)^2}\in C^1(\mathbb{R})$ (composizione di funzioni di classe C^1) e $\int_x^3 e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale sull'esistenza delle primitive.

In particolare, per ogni $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x) = -2(x-3)e^{-(x-3)^2} - e^{-(x-3)^2}|x-2|$$

Studiamo il segno di f'.

$$\begin{cases} f'>0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{cases} -e^{-(x-3)^2}\left(2(x-3)+|x-2|\right)>0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2(x-3)+|x-2|<0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-3)+x-2<0 \\ x\geq 2\end{cases} \vee \begin{cases} 2(x-3)-x+2<0 \\ x<2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x-8<0 \\ x\geq 2.\end{cases} \vee \begin{cases} x-4<0 \\ x<0\end{cases} \iff \begin{cases} x<\frac{8}{3} \\ x\geq 2\end{cases} \vee \begin{cases} x<4 \\ x<2\end{cases}$$

$$\iff x\in\left[2,\tfrac{8}{3}\right[\cup \left]-\infty,2\right[\iff x\in\left]-\infty,\tfrac{8}{3}\right[.$$

Quindi f è monotona strettamente crescente in $\left]-\infty, \frac{8}{3}\right]$, mentre è monotona strettamente decrescente in $\left[\frac{8}{3}, +\infty\right[$. In $\frac{8}{3}$ si ha un punto di massimo assoluto

L'insieme dei punti per cui f è derivabile due volte è $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Infatti f' è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ perché somma e prodotto di funzioni derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Si noti che $|x-2|$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, mentre gli altri fattori sono derivabili in $\mathbb{R}$.

In particolare, per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f''(x) = 4(x-3)^2 e^{-(x-3)^2} - 2e^{-(x-3)^2} + 2(x-3)e^{-(x-3)^2}|x-2| - \operatorname{sgn}(x-2)e^{-(x-3)^2}$$

$$= e^{-(x-3)^2}\left(4(x-3)^2 - 2 + 2(x-3)|x-2| - \operatorname{sgn}(x-2)\right)$$

Studiamo il segno di f''

$$\begin{cases} f''>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \end{cases} \iff \begin{cases} 4(x-3)^2-2+2(x-3)|x-2|-\operatorname{sgn}(x-2)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 4(x-3)^2-2+2(x-3)(x-2)-1>0 \\ x>2 \end{cases} \vee \begin{cases} 4(x-3)^2-2+2(x-3)(2-x)+1>0 \\ x<2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x^2-24x+36-2+2x^2-10x+12-1>0 \\ x>2 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x^2-24x+36-2-2x^2+10x-12+1>0 \\ x<2 \end{cases}$$

3

$$\iff \begin{cases} 6x^2-34x+45>0 \\ x>2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2-14x+23>0 \\ x<2. \end{cases}$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{17\pm\sqrt{17^2-270}}{6} = \frac{17\pm\sqrt{19}}{6}} \qquad \boxed{x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{49-46}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{3}}{2}}$$

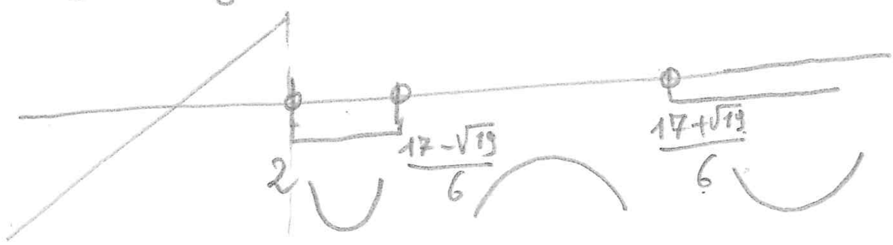
$$\iff \underbrace{\begin{cases} x<\frac{17-\sqrt{19}}{6} \vee x>\frac{17+\sqrt{19}}{6} \\ x>2 \end{cases}}_{\mathrm{I}} \vee \underbrace{\begin{cases} x<\frac{7-\sqrt{3}}{2} \vee x>\frac{7+\sqrt{3}}{2} \\ x<2 \end{cases}}_{\mathrm{II}}$$

I

$\frac{17-5}{6} < \frac{17-\sqrt{19}}{6} < \frac{17-4}{6} = \frac{13}{6}$, controlliamo accuratamente

$\frac{17-\sqrt{19}}{6} < 2 \iff 17-\sqrt{19}<12 \iff 5<\sqrt{19} \iff 25<19$ NO, quindi

$2 < \frac{17-\sqrt{19}}{6}$



f è convessa in $\left[2, \frac{17-\sqrt{19}}{6}\right]$ e in $\left[\frac{17+\sqrt{19}}{6}, +\infty\right[$, mentre è concava in $\left[\frac{17-\sqrt{19}}{6}, \frac{17+\sqrt{19}}{6}\right]$.

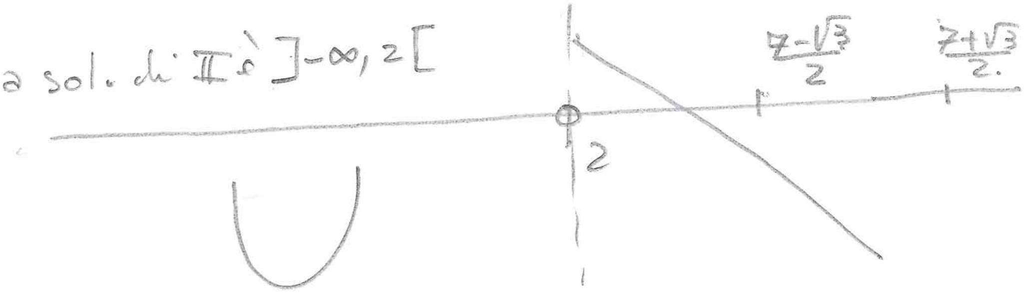
II

$\frac{5}{3} < \frac{7-2}{3} < \frac{7-\sqrt{3}}{2} < \frac{7-1}{2} = 3$. Controlliamo se $\frac{7-\sqrt{3}}{2} < 2$.

$\frac{7-\sqrt{3}}{2} < 2 \iff 7-\sqrt{3}<4 \iff 3<\sqrt{3} \iff 9<3$: NO. Quindi

$2 < \frac{7-\sqrt{3}}{2}$

allora la sol. di II è $]-\infty, 2[$



④

Quindi f è convessa in $]-\infty, 2]$.

Inoltre $\frac{17-\sqrt{15}}{6}$ e $\frac{17+\sqrt{15}}{6}$ sono punti di flesso.

Studiamo la presenza di asintoti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-(x-3)^2} + \lim_{x\to-\infty} \int_x^3 e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt$$

$$= 0 + \int_{-\infty}^3 e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt < +\infty \text{. Infatti } e^{-(t-3)^2}|t-2| > 0$$

e $$e^{-(t-3)^2}|t-2| = e^{-\frac{(t-3)^2}{2}} e^{-(t-3)^2}|t-2| < c\, e^{-\frac{(t-3)^2}{2}}$$

(perché $e^{-(t-3)^2}|t-2| \to 0$ per $t \to -\infty$) per ogni $t < t_0$.

Per il Teorema del confronto concludiamo che $\int_{-\infty}^3 e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt$ è convergente

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-(x-3)^2} + \lim_{x\to+\infty} \int_x^3 e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt$$

$$= -\int_3^{+\infty} e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt < 0 \quad e \quad -\int_3^{+\infty} e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt > -\infty$$

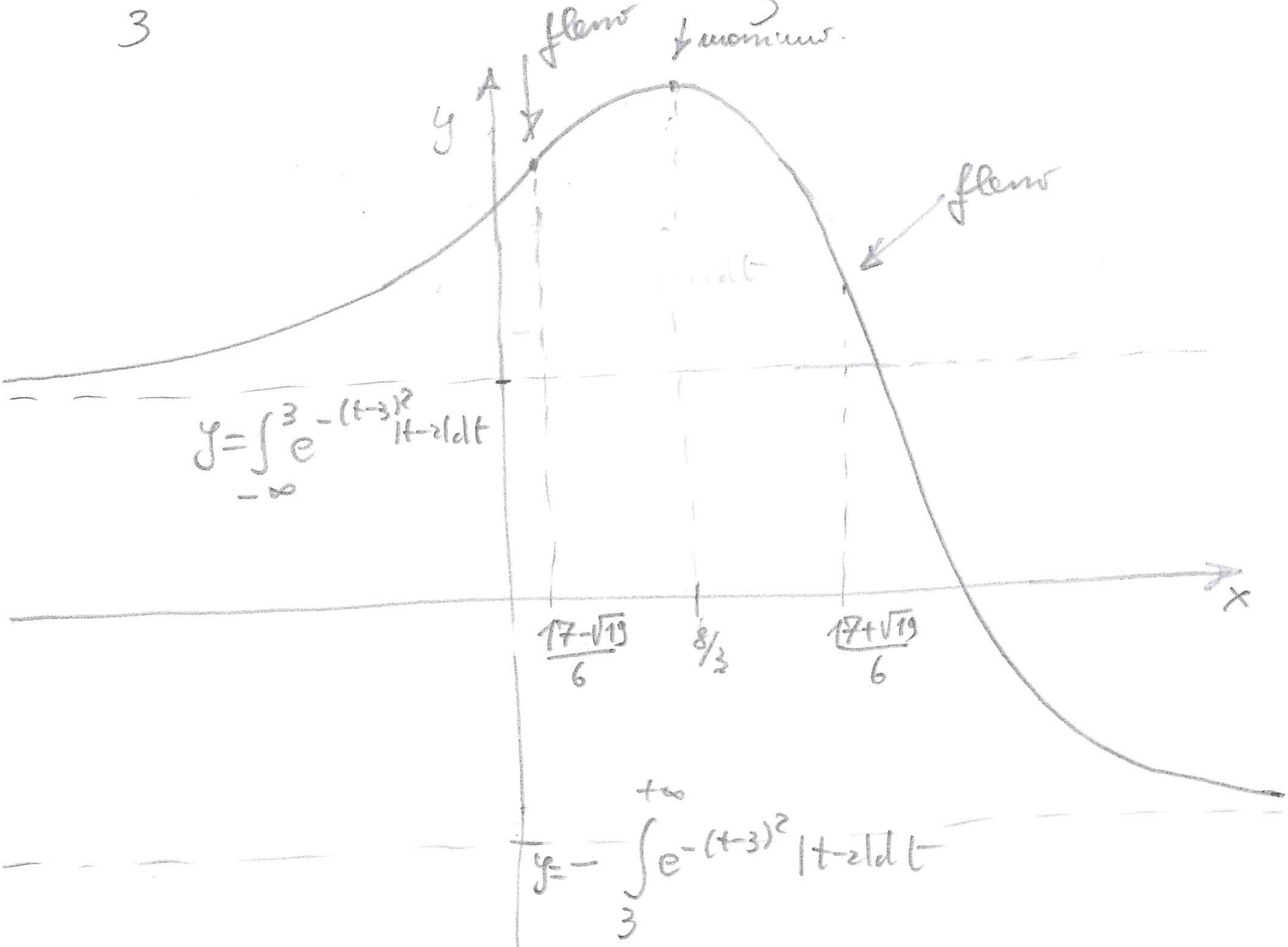
la prova segue con un ragionamento analogo a quello del caso precedente.

Quindi esistono due asintoti orizzontali :

$$y = \int_{-\infty}^{3} e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{3} e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt > 0$$

e

$$y = -\int_{3}^{+\infty} e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt \quad \text{con} \quad -\int_{3}^{+\infty} e^{-(t-3)^2}|t-2|\,dt < 0.$$



L'equazione $f(x)=0$ in $[0,+\infty[$ ha una sola soluzione.

Calcolare

$$I=\int_0^2 \frac{3}{(t+1)^5}\sin\left(\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt \quad . \quad \text{Posto } \frac{1}{(t+1)^2}=y$$

$$dy=-\frac{2}{(t+1)^3}\,dt \quad . \text{ Quindi}$$

per parti

$$I=-\frac{1}{2}\int_1^{1/9} 3y\sin y\,dy = \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{9}}^{1} y\sin y\,dy = \left[-\frac{3}{2}y\cos y\right]_{y=\frac{1}{9}}^{y=1}+\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{9}}^{1}\cos y\,dy$$

$$=-\frac{3}{2}\cos 1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\cos\frac{1}{9}+\frac{3}{2}\left[\sin y\right]_{y=\frac{1}{9}}^{y=1} = -\frac{3}{2}\cos(1)+\frac{1}{6}\cos\frac{1}{9}+\frac{3}{2}\sin(1)-\frac{1}{6}\sin\frac{1}{9}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sin(1)-\cos(1)\right)+\frac{1}{6}\left(\cos\frac{1}{9}-\sin\frac{1}{9}\right).$$

$\alpha>0$ Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{x+3}}}{x^{8\alpha}+x^2}\,dx$.

La funzione $\displaystyle\frac{e^{-\frac{x^2}{x+3}}}{x^{8\alpha}+x^2}\in C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ ed è positiva.

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{x+3}}}{x^{8\alpha}+x^2}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x^{8\alpha}+x^2} \sim \begin{cases}\dfrac{1}{x^{8\alpha}} & \text{se } 8\alpha<2\\[2mm] \dfrac{1}{2x^2} & \text{se } 8\alpha=2\\[2mm] \dfrac{1}{x^2} & \text{se } 8\alpha>2.\end{cases}$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-\frac{x^2}{x+3}}}{x^{8\alpha}+x^2}\,dx$ converge se e solo se $\begin{cases}8\alpha<1\\ 8\alpha<2\\ \alpha>0\end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{0<\alpha<\frac{1}{8}}$

Mentre $\displaystyle\frac{e^{-\frac{x^2}{x+3}}}{x^{8\alpha}+x^2}\leq e^{-\frac{x^2}{x+3}}$ per $x\geq 1$, quindi applicando il

Teorema del confronto $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{x+3}}}{x^{8\alpha}+x^2}\,dx$ converge se e solo se $e^{-\frac{x^2}{x+3}}$ è integrabile in s.g. su $[1,+\infty[$.

D'altra parte, per il Teorema del confronto asintotico

$e^{-\frac{x^2}{x+3}} \sim e^{-x}$, $x \to +\infty$. Quindi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{x+3}}}{x^{8\alpha}+x^2}\,dx$

converge per ogni $\alpha>0$.

Riassumendo: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{x+3}}}{x^{8\alpha}+x^2}\,dx$ converge se e solo se

$\alpha \in]0,\frac{1}{8}[$.

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\log(1-x)+x^2}{(\sin^2(2x)-\sinh^2(2x))\cos^2(-x+4x^2)} = \frac{3}{64}$$

$$N \sim \cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\cancel{\frac{x^3}{3}}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)-\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\cancel{\frac{x^3}{3}}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)+\cancel{x^2}$$

$$\sim -\frac{x^4}{2}, \quad \text{per } x\to 0$$

$$D \sim (\sin(2x)-\sinh(2x))(\sin(2x)+\sinh(2x))$$

$$\sim \left(\cancel{2x}-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)-\cancel{2x}-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)\right)(2x+o(x)+2x+o(x))$$

$$\sim -\frac{(2x)^3}{3}\cdot 4x \sim -\frac{32}{3}x^4, \quad \text{per } x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{N}{D} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2}}{-\frac{32}{3}x^4} = \frac{3}{64}$$

$f: I \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in D(I)$, Diremo che f è derivabile in x_0 se esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}.$$

In tal caso denoteremo ℓ con il simbolo $f'(x_0)$ e chiameremo tale limite derivata della funzione f in x_0.

Il differenziale della funzione f in x_0 è l'applicazione lineare $df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$.