$$f(x) = \int_0^x \arctan\left(|t^2-4|-16\right) dt$$

$t \longmapsto \arctan(|t^2-4|-16) \in C(\mathbb{R})$ perché composizione di funzioni continue.

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale $f \in C^1(\mathbb{R})$, essendo $t \longmapsto \arctan(|t^2-4|-16) \in C(\mathbb{R})$.

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \arctan(|x^2-4|-16)$

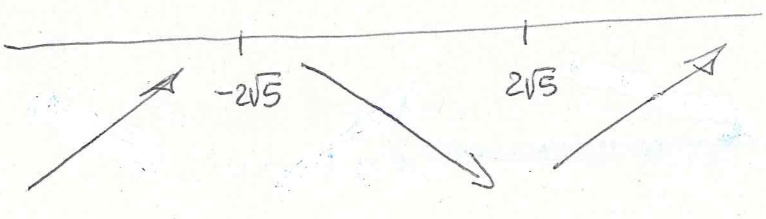
Studiamo il segno di f': $\begin{cases} f' > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |x^2-4|-16 > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-4 > 16 \ \vee \ x^2-4 < -16 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 > 20 \ \vee \ x^2+12 < 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

non ha soluzione

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 > 20 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < -2\sqrt{5} \ \vee \ x > 2\sqrt{5} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -2\sqrt{5}\right[\cup \left]2\sqrt{5}, +\infty\right[$$

Pertanto



Quindi in $-2\sqrt{5}$ si realizza un massimo, mentre in $2\sqrt{5}$ si ha un minimo.

Inoltre $x \longmapsto \arctan(|x^2-4|-16)$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, perché arctan è derivabile su $\mathbb{R}$, mentre $x \longmapsto |x^2-4|-16$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. La conclusione segue dal fatto che $\arctan(|x^2-4|-16)$ è composizione tra arctan e $|x^2-4|-16$.

In particolare per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

$$f''(x) = \frac{1}{(|x^2-4|-16)^2+1} \cdot \mathrm{sgn}(x^2-4) \cdot 2x .$$

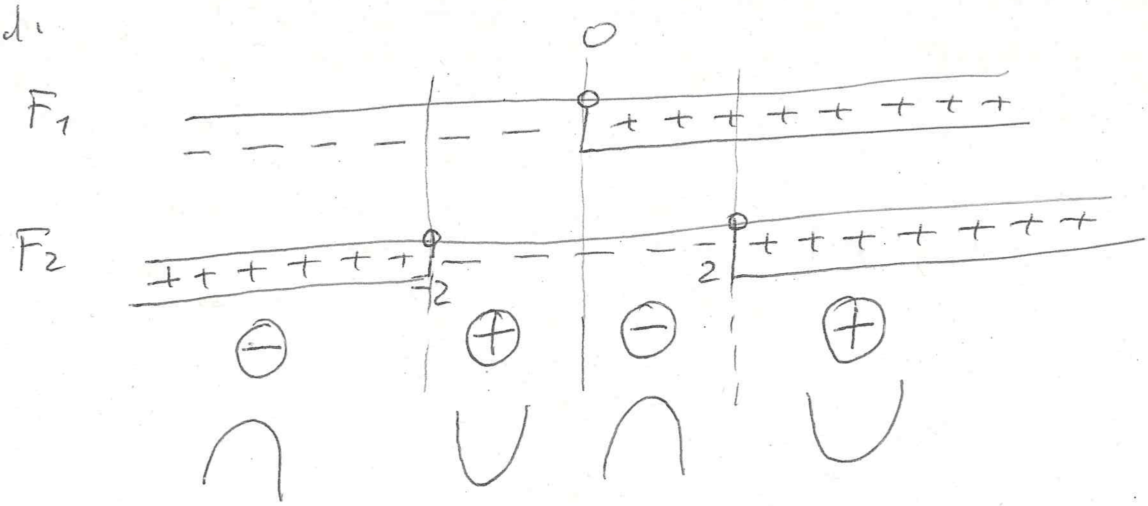
Studiamo il segno di f'':

$$\begin{cases} f'' > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 2x \cdot \mathrm{sgn}(x^2-4) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} \end{cases}$$

$F_1 = 2x \longrightarrow 2x > 0 \longleftrightarrow x > 0$

$F_2 = \mathrm{sgn}(x^2-4) \longrightarrow \mathrm{sgn}(x^2-4) > 0 \longleftrightarrow x^2-4 > 0 \longleftrightarrow x < -2 \vee x > 2$

Quindi



Quindi $-2, 0, 2$ sono punti di flesso. Mentre f è concava in $]-\infty,-2]$, in $[0,2]$ ed è convessa in $[-2,0]$ e $[2,+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \arctan(|t^2-4|-16)\,dt = \int_0^{+\infty} \arctan(|t^2-4|-16)\,dt$$

ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, perché $\arctan(|t^2-4|-16) \sim \frac{\pi}{2}$, $t \to +\infty$, quindi $\int_0^{+\infty} \arctan(|t^2-4|-16)\,dt$ diverge positivamente.

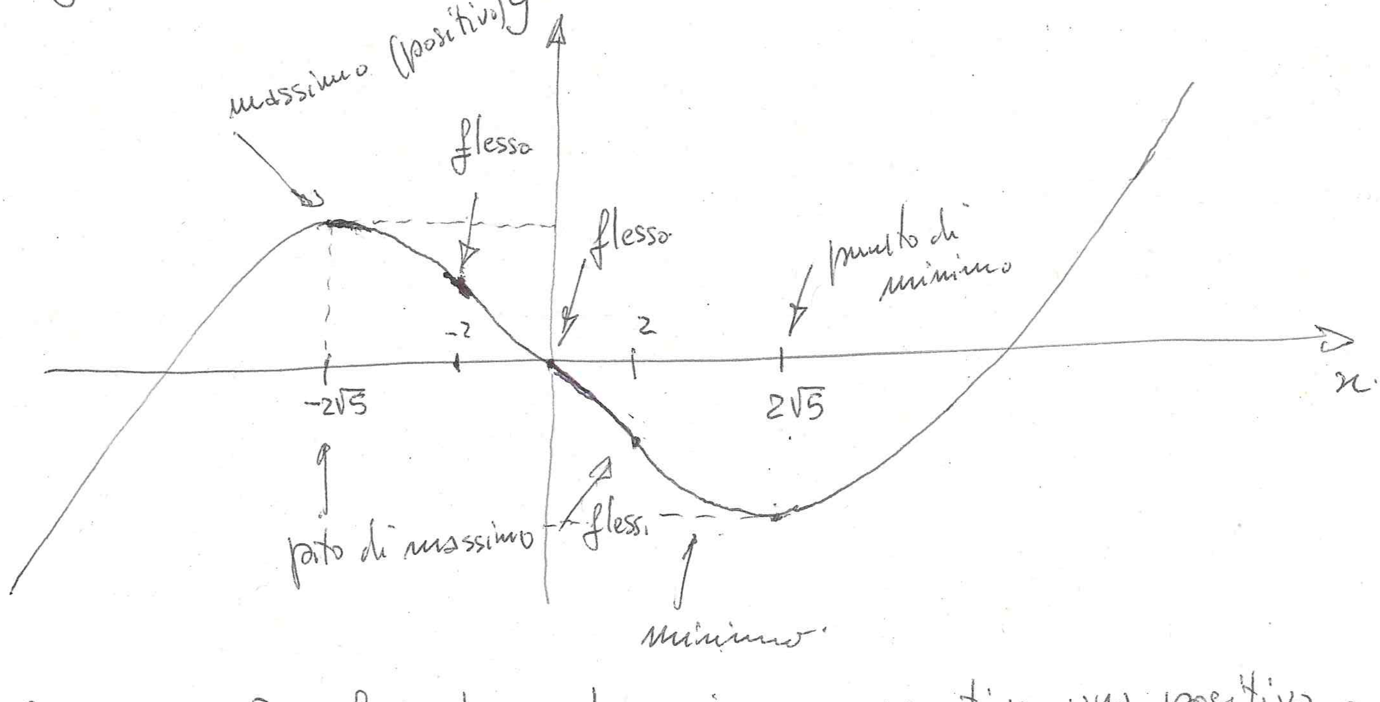
Analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_0^x \arctan(|t^2-4|-16)\,dt$

$$= \int_0^{-\infty} \arctan(|t^2-4|-16)\,dt = -\int_{-\infty}^0 \arctan(|t^2-4|-16)\,dt = -\infty$$

Infatti $\arctan(|t^2-4|-16) \sim \frac{\pi}{2}$, $t \to -\infty$ e

$$\int_{-\infty}^0 \arctan(|t^2-4|-16)\,dt = +\infty.$$

Pertanto non esistono asintoti. Per disegnare il grafico osserviamo che $f(0)=0$



$f(x)=0$ in $\mathbb{R}$ ha tre soluzioni una negativa una positiva e una in 0.

(4)

$$\int_0^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}+1}\,dt = \int_0^{\sqrt2} \frac{2x\,dx}{x^2+x+1} =$$ pongo $t=x^2$ $dt=2x\,dx$
$$\int_0^{\sqrt2} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int_0^{\sqrt2} \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \Big[\log(x^2+x+1)\Big]_{x=0}^{x=\sqrt2} - \int_0^{\sqrt2} \frac{dx}{(x+\frac12)^2+\frac34}$$

$$= \log(2+\sqrt2+1) - \log 1 - \frac43 \int_0^{\sqrt2} \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt3}(x+\frac12)\right]^2+1}$$

$$= \log(3+\sqrt2) - \frac43 \int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\frac{2}{\sqrt3}(\sqrt2+\frac12)} \frac{\frac{\sqrt3}{2}\,dz}{1+z^2} = \log(3+\sqrt2) - \frac{2}{\sqrt3}\Big[\arctan z\Big]_{z=\frac{1}{\sqrt3}}^{z=\frac{2}{\sqrt3}(\sqrt2+\frac12)}$$

$$\left(z=\frac{2}{\sqrt3}\left(x+\frac12\right) \longrightarrow \frac{\sqrt3}{2}z-\frac12=x \longrightarrow dx=\frac{\sqrt3}{2}dz\right)$$

$$= \log(3+\sqrt2) - \frac{2}{\sqrt3}\left(\arctan \frac{2}{\sqrt3}\left(\sqrt2+\frac12\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)\right) = \log 21 - \frac{2}{\sqrt3}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt3}\left(\sqrt2+\frac12\right)\right) - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh 2x}{e^{8\alpha x}+1}\,dx \qquad \frac{\sinh(2x)}{e^{8\alpha x}+1} \in C([0,+\infty[,\mathbb{R})$$

Inoltre $\frac{\sinh(2x)}{e^{8\alpha x}+1} > 0 \quad \forall x>0$. Quindi l'integrale sarà conv. se e solo se $\frac{1}{e^{(8\alpha-2)x}}$ è int. in s.g. su $[0,+\infty[$. Infatti per il criterio del cfr. asintotico
$$\frac{\sinh(2x)}{e^{8\alpha x}+1} \sim \frac{e^{2x}}{e^{8\alpha x}} \sim \frac{1}{e^{(8\alpha-2)x}} \quad \text{per } x\to+\infty$$

La funzione $\frac{1}{e^{(8\alpha-2)x}}$ è integrabile in senso generalizzato su $[0,+\infty[$ se e solo se $8\alpha-2>0$, cioè se e solo se

$\alpha > \frac{1}{4}$.

N.B.

(Il seguente limite è simile a quello del compito ma, non avendo il testo in questo momento, potrebbe differire dal testo originale. Il testo sarà visibile lunedì)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\log(1+x)+\sin\frac{x}{2}+\cos x-1+\frac{x}{2}}{\sin(4x)\left(x^2\sinh^2(3x)-\sinh^2 3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)} = \frac{17}{9\cdot 24\cdot\sqrt{2}}$$

$$\log(1+x) \sim x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}, \quad x\to 0$$

$$\sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^3\frac{1}{6}, \quad x\to 0$$

$$\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}, \quad x\to 0$$

Quindi $N \sim \cancel{-x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)+\cancel{\frac{x}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^3\frac{1}{6}+o(x^3)+\cancel{1}-\cancel{\frac{x^2}{2}}\cancel{-1}+\cancel{\frac{x}{2}}$

$$\underset{x\to 0}{\sim}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{48}\right)x^3 \sim -\frac{17}{48}x^3$$

$$D \underset{x\to 0}{\sim} 4x\left(x\sinh(3x)-\sinh 3x\right)\left(x\sinh 3x+\sinh(3x)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sim 4x(-3x)(3x)\frac{\sqrt{2}}{2} \sim -\frac{9}{2}\sqrt{2}\,x^3$$

Quindi il limite è $\frac{N}{D} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{17}{48}x^3}{-\frac{9}{2}\sqrt{2}\,x^3\cdot 4} \sim \frac{17}{9\cdot 24\cdot\sqrt{2}\cdot 4}$

Scrivere la def di succ. convergente e la definizione di e.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge ad $\alpha \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ |a_n - \alpha| < \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n > \bar{n}(\varepsilon)$$

In tal caso si scriverà brevemente $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$.

La definizione di e è la seguente

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Infatti si dimostra che $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ è limitata e monotona crescente.

Quindi $\exists \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per il Teorema sull'esistenza del limite delle succ. monotone.

Tale limite viene indicato con e.