Svolgimento

(i)

Iniziamo risolvendo $|x-3|-4>0$.

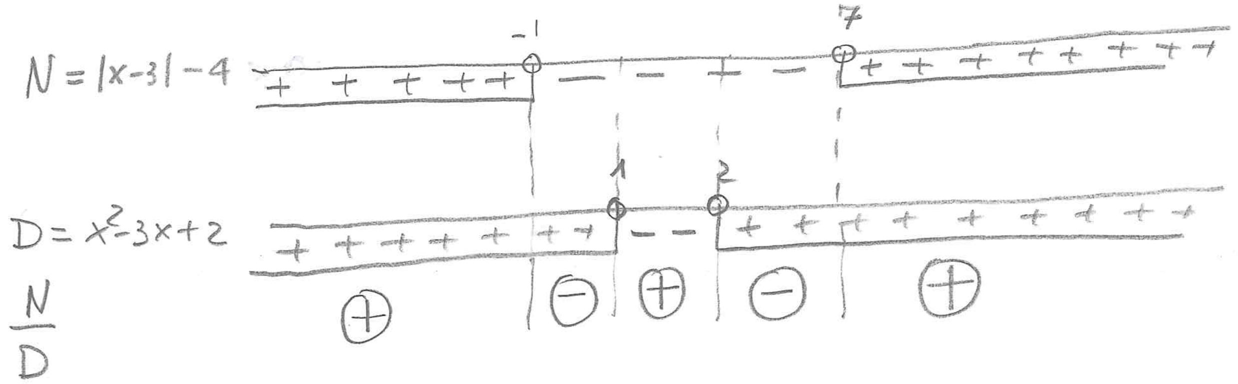
$|x-3|-4>0 \iff |x-3|>4 \iff x-3>4 \vee x-3<-4$

$\iff x>7 \vee x<-1$. Quindi $|x-3|-4>0 \iff x \in ]-\infty,-1[ \cup ]7,+\infty[$.

Risolviamo $x^2-3x+2>0$. $\Delta = 9-8=1>0$, $x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

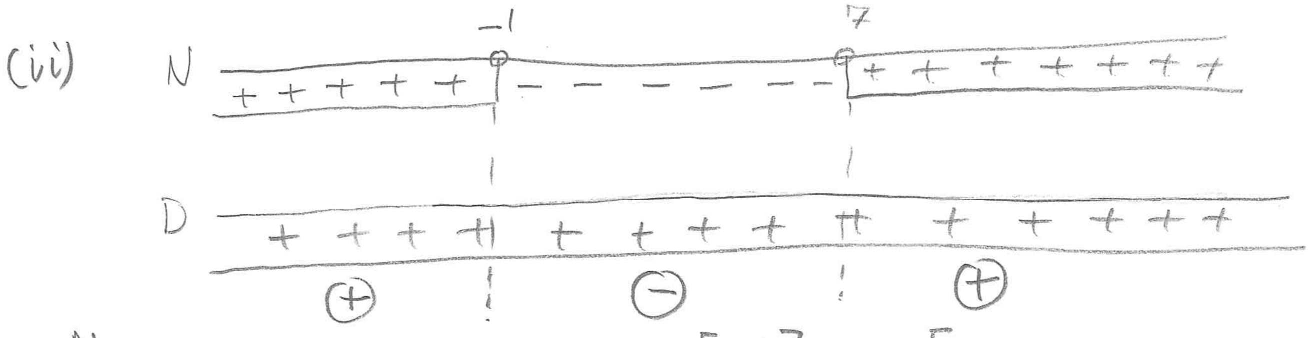
Pertanto $x^2-3x+2>0 \iff x \in ]-\infty,1[ \cup ]2,+\infty[$.

Possiamo quindi affermare che:




Quindi $\frac{N}{D}>0 \iff x \in ]-\infty,-1[ \cup ]1,2[ \cup ]7,+\infty[$.

(ii)




$\frac{N}{D}>0 \iff x \in ]-\infty,-1[ \cup ]7,+\infty[$.

Si osservi che $\frac{|x-3|-4}{x^2+x+1}>0 \iff |x-3|-4>0$ perché

$D=x^2+x+1>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(iii) La disequazione (iii) si risolve studiando i segni dei singoli fattori a numeratore e a denominatore.

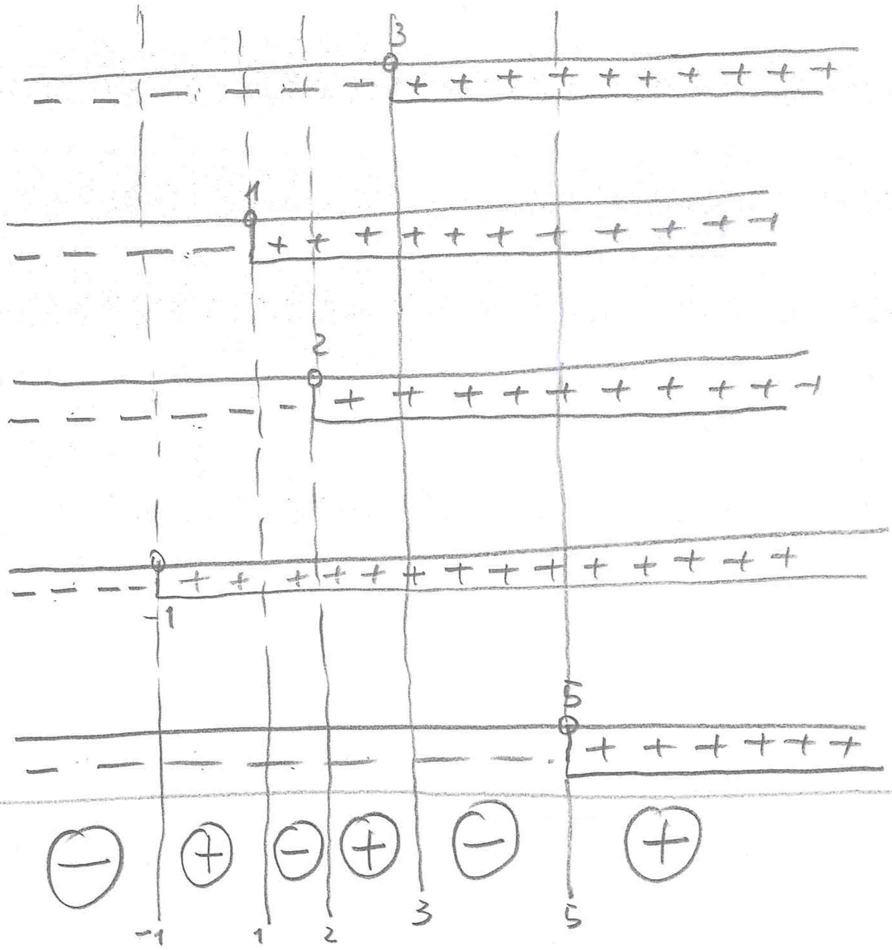
$N_1 = x-3>0 \Longleftrightarrow x>3 \rightarrow$

$N_2 = x-1>0 \Longleftrightarrow x>1 \rightarrow$

$D_1 = x-2>0 \Longleftrightarrow x>2 \rightarrow$

$D_2 = x+1>0 \Longleftrightarrow x>-1 \rightarrow$

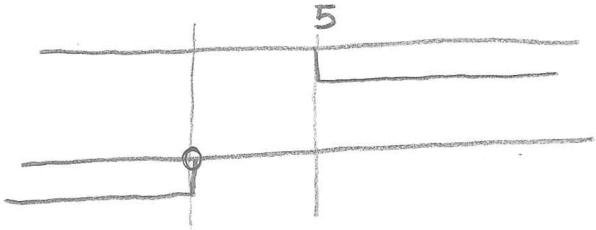
$D_3 = x-5>0 \Longleftrightarrow x>5 \rightarrow$




Quindi $\dfrac{N_1 \cdot N_2}{D_1 \cdot D_2 \cdot D_3} > 0 \Longleftrightarrow x \in \,]-1,1[\, \cup \,]2,3[\, \cup \,]5,+\infty[$

(IV) $\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ \sqrt{x-5} > x \end{cases} \Longleftrightarrow \underset{\text{I}}{\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x<0 \end{cases}} \vee \underset{\text{II}}{\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x-5 > x^2 \end{cases}}$ ;

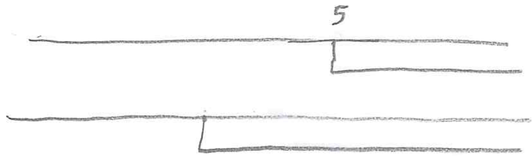
I $\begin{cases} x \geq 5 \\ x<0 \end{cases}$




$S_I = \emptyset$

L'intersezione tra i due intervalli è $\emptyset$

In questo caso stiamo risolvendo un sistema di disequazioni!!

II $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq 0 \\ 0 > x^2 - x + 5 \end{cases}$ $\rightarrow$ 

$\rightarrow \Delta = 1 - 20 = -19 < 0 \rightarrow \phi$

Quindi $S_{II} = \phi$. Pertanto $S_I \cup S_{II} = \phi$

La disequazione (IV) non ha soluzioni reali.

/—/

(V) In questo caso non dobbiamo imporre condizioni di esistenza sulla radice quadrata, perché il radicando è sempre maggiore o uguale di zero; c'è il valore assoluto!!

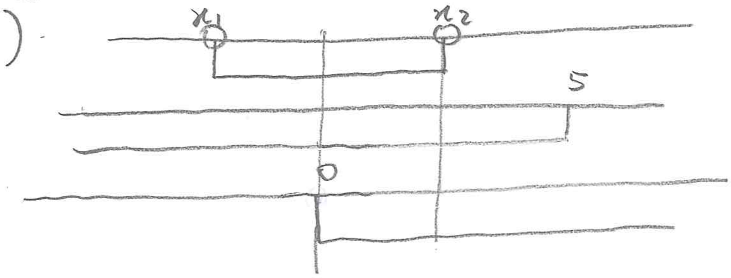
Inoltre sappiamo che la radice quadrata aritmetica è sempre un numero positivo (o nullo). Quindi

$$\sqrt{|x-5|} > x \iff \underbrace{\begin{cases} x < 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}}_{I} \vee \underbrace{\begin{cases} |x-5| > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}}_{II}$$

$S_I = ]-\infty, 0[$.

II $\begin{cases} |x-5| > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{cases} 5 - x > x^2 \\ x - 5 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}}_{II_a} \vee \underbrace{\begin{cases} x - 5 > x^2 \\ x - 5 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}}_{II_b}$

$II_a$ $\begin{cases} x^2 + x - 5 < 0, (\Delta = 21 > 0) \\ x \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$



$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$S_{II_a} = [0, x_2[$

$\mathrm{II}_b$ $\begin{cases} 0 > x^2+5-x & \Delta = -19 < 0 \longrightarrow \phi \\ x > 5 & \longrightarrow \\ x \geq 0 & \longrightarrow \end{cases}$

$$S_{\mathrm{II}_b} = \phi$$

Quindi $S = S_{\mathrm{I}} \cup S_{\mathrm{II}} = S_{\mathrm{I}} \cup S_{\mathrm{II}_a} \cup S_{\mathrm{II}_b} = ]-\infty, 0[ \cup [0, x_2[$

$= ]-\infty, x_2[ = ]-\infty, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}[$ .

(VI) $\sqrt{x-5} > \sqrt{x-3} \iff \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ \sqrt{x-5} > \sqrt{x-3} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq 3 \\ \sqrt{x-5} > \sqrt{x-3} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geq 5 \\ \sqrt{x-5} > \sqrt{x-3} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 5 \\ x-5 > x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 5 \\ -2 > 0 \end{cases}$

$S = \phi$