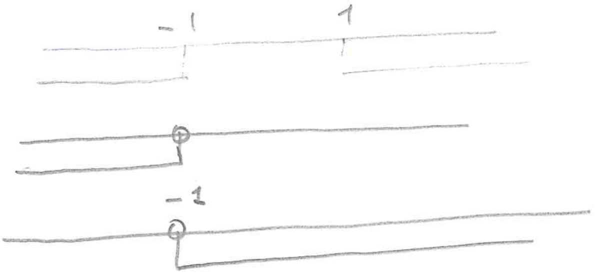
Correzione

Es. 1

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-1} - x > 0 \\ \sqrt{x^2-1} - x > 1 \end{cases} \iff \sqrt{x^2-1} - x > 1 \iff \sqrt{x^2-1} > 1+x$$

$$\iff \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 1+x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1 > (1+x)^2 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x<-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ \cancel{x^2}-1 > 1+2x+\cancel{x^2} \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff x<-1 \vee \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 2+2x<0 \\ x>-1 \end{cases}$$



$S = \emptyset$

$\iff x \in]-\infty,-1[$.

Quindi la relazione $\log(\log(\sqrt{x^2-1}-x))$ è una funzione solo se ha dominio $]-\infty,-1[$

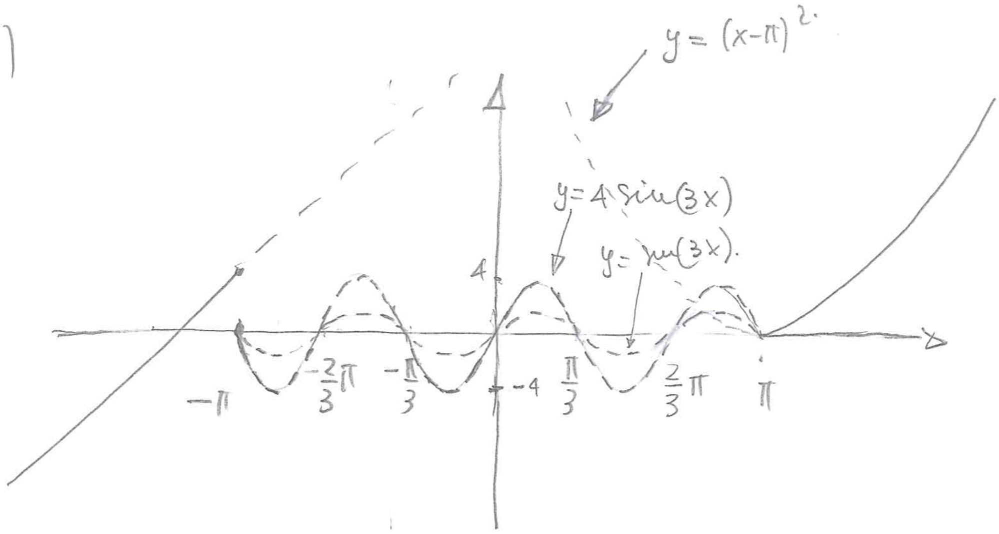
Es 2.

$f|_{[-\pi,\pi]}$, $f|_{]\pi,+\infty[}$, $f|_{]-\infty,-\pi[}$ sono funzioni continue perché composizioni di funzioni continue.

$\lim_{x\to\pi^+} f = 0 = f(\pi) = |4\sin(3\pi)|$, quindi f è continua in π

$\lim_{x\to-\pi^-} f = 4 \neq f(-\pi) = |4\sin(-3\pi)| = |-4\sin 3\pi| = 0$, quindi f non è continua in $-\pi$. Concludiamo allora che f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-\pi\}$.

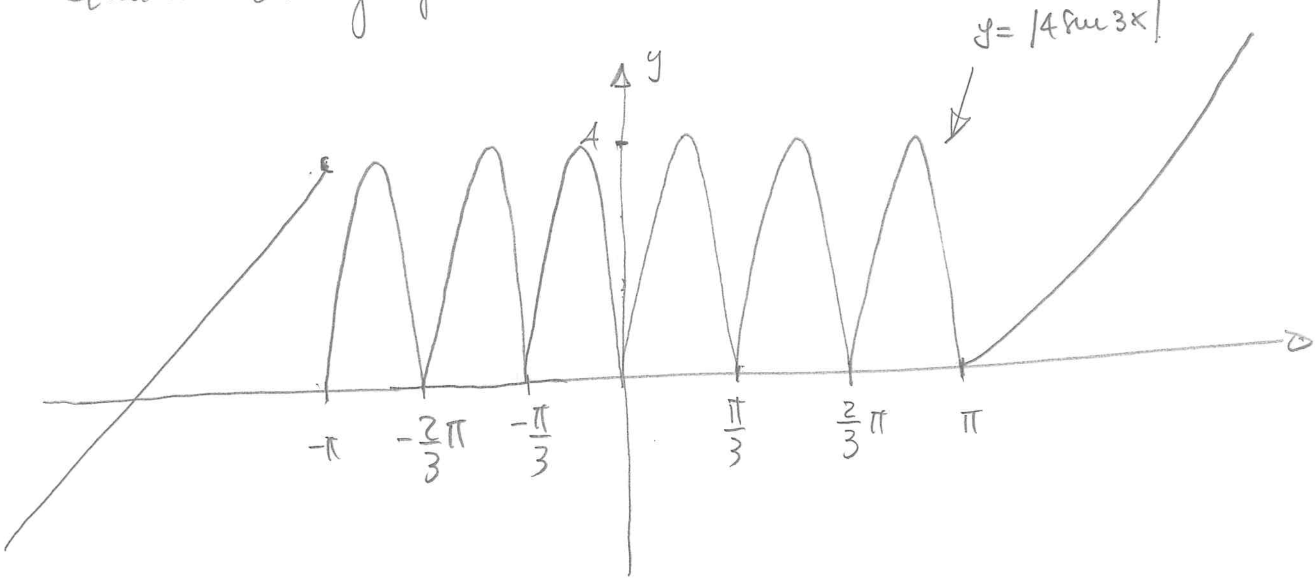
(ii)



$3x = k\pi \qquad x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \; -\pi \le \frac{k\pi}{3} \le \pi$ (sono i punti in cui si annulla $|4\sin(3x)|$ in $[-\pi, \pi]$. Cioè $-1 \le \frac{k}{3} \le 1 \iff$

$-3 \le k \le 3$, vale a dire $x = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{3}$; $x = \pm\frac{2}{3}\pi$, $x = \pm\pi$

Quindi il grafico è



(iii) $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x \ge -\pi \quad \vee \quad \begin{cases} x + \pi + 4 \ge 0 \\ x < -\pi \end{cases}$

$\iff x \ge -\pi \;\vee\; -4-\pi \le x < -\pi \iff x \ge -4-\pi$

Es. 3

$$f_{|]-5,7[}(x) = \frac{x^2+2x-15}{x^2-2x-35} \in C(]-5,7[, \mathbb{R})$$

perché $x^2-2x-35=0 \iff x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+35}}{1}$ $\begin{cases} 1+6=7 \\ 1-6=-5 \end{cases}$

e quindi $\frac{x^2+2x-15}{x^2-2x-35} \in C(\mathbb{R} \setminus \{-5,7\})$.

Analogamente $f_{|[7,+\infty[} \in C([7,+\infty[, \mathbb{R})$ e

$-1 \in C(]-\infty,-5], \mathbb{R})$.

Quindi f è continua in $]-\infty,-5[\cup]-5,7[\cup]7,+\infty[$.

Inoltre

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = \lim_{x \to -5^+} \frac{\cancel{(x+5)}(x-3)}{\cancel{(x+5)}(x-7)} = \lim_{x \to -5^+} \frac{x-3}{x-7} = \frac{2}{3}$$

Quindi $\lim_{x \to -5^+} f(x) = \frac{2}{3} \neq -1$.

Infine $\lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7^-} \frac{x-3}{x-7} = -\infty$

Allora f è continua solo in $]-\infty,-5[\cup]-5,7[\cup]7,+\infty[$.