Correzione del compito del 17/10/2014

Esercizio 1

(a) No; infatti non esiste $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Quindi f non può essere continua in 0.

(b) No; infatti non esiste $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$; è sufficiente considerare $\frac{1}{x_n} = 2n\pi$, cioè $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, e $\frac{1}{y_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Allora $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = 0$

e $\lim_{n \to +\infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to +\infty} \sin(2n\pi) = 0$,

$\lim_{n \to +\infty} \sin \frac{1}{y_n} = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$.

Quindi non esiste $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$.

(c) Sì; vedi prova descritta in (b).

(d) No; infatti $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ e $f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ con $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Quindi non esiste un intorno di 0, V_0, per cui $f(0) \leq f(x)$, $\forall x \in V_0$.

Esercizio 2

(a) No, infatti 0 è punto di minimo per f perché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

(b) No, infatti f è continua in $[-1, 1]$, in quanto se $x \neq 0$ f è continua perché composizione di funzioni continue. Inoltre è continua anche in 0 perché $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

(c) NO perché $f\left(\frac{1}{2\pi n}\right)=0$ e $f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$

Quindi f non può essere crescente in un intorno destro.

(d) Sì. In 0 f ha minimo perché $f(0)=0\leq f(x)$

per ogni $x\in[-1,1]$