Correzione del 20/10/2014

Es 1

Se f è monotona strettamente crescente allora $f^{-1}: f(A) \longrightarrow A$, dove $f: A \longrightarrow B$, è strettamente crescente, perché per ogni $y_1, y_2 \in f(A)$ se $y_1 < y_2$ allora $y_1 = f(a_1) < y_2 = f(a_2)$. In particolare $f^{-1}(y_1) = a_1$, $f^{-1}(y_2) = a_2$ e $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ perché se $f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1)$ allora per la monotonia di f avremmo $f(f^{-1}(y_2)) < f(f^{-1}(y_1))$ cioè $y_2 < y_1$ ottenendo una contraddizione. Quindi $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Se f è strettamente decrescente allora per ogni $y_1, y_2 \in f(A)$, se $y_1 < y_2$ allora $y_1 = f(a_1) < y_2 = f(a_2)$. In particolare $f^{-1}(y_1) = a_1$, $f^{-1}(y_2) = a_2$ e $f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1)$, perché se $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ allora per la stretta monotonia di f si avrebbe $f(f^{-1}(y_2)) < f(f^{-1}(y_1)) \longrightarrow y_2 < y_1$ ottenendo una contraddizione. Quindi $f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1)$.

Es 2

Se f e g sono monotone crescenti; $g: A \longrightarrow B$, $f: C \longrightarrow D$ $g(A) \subset C$. Allora $f \circ g: A \longrightarrow D$ è monotona crescente. Infatti per ogni $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2$ allora $g(x_1) \leq g(x_2)$ e quindi $f(g(x_1)) \leq f(g(x_2))$, cioè $(f \circ g)(x_1) \leq (f \circ g)(x_2)$.

ES.3

(i) Se f è monotona crescente e g è monotona decrescente e $g: A \to B$, $f: C \to D$ con $g(A) \subset C$. Allora $f \circ g$ è monotona decrescente.
Infatti per ogni $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2$, allora $g(x_2) \leq g(x_1)$; quindi $f(g(x_2)) \leq f(g(x_1))$ perché f è monotone crescente, cioè $f \circ g$ è monotone decrescente.

(ii) Se f è monotona decrescente e g è monotone crescente e $g: A \to B$, $f: C \to D$ con $g(A) \subset C$, allora $f \circ g$ è monotone decrescente. Infatti per ogni $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2$, allora $g(x_1) \leq g(x_2)$; quindi $f(g(x_1)) \geq f(g(x_2))$, perché f è monotone decrescente. Pertanto $f \circ g$ è monotona decrescente

(ii) Se $g: A \to B$, $f: C \to D$ sono entrambe monotone decrescenti e $g(A) \subset C$, allora $f \circ g$ è monotone crescente.
Infatti per ogni $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2$, allora $g(x_2) \leq g(x_1)$ inoltre $f(g(x_1)) \leq f(g(x_2))$ perché f è monotone decrescente. Pertanto $f \circ g$ è monotone crescente.