Correzione degli esercizi del 29/10/2014

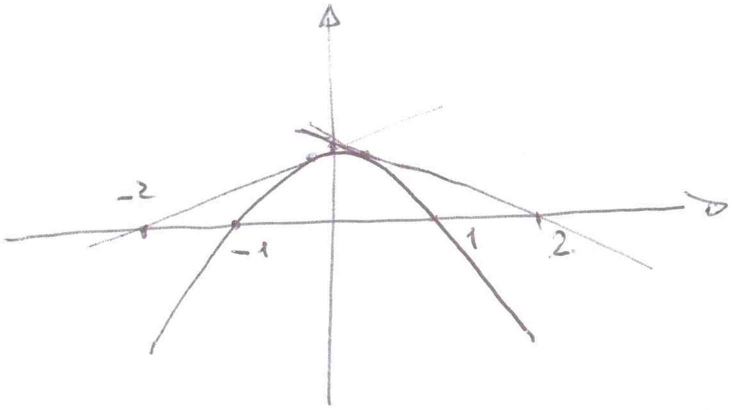
Es 1 $\quad f(x)=x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il punto $(2,4)$ appartiene al grafico della funzione, perché $f(2)=2^2=4$.

L'equazione della retta tangente è $y-f(2)=f'(2)(x-2)$

Quindi, sapendo che $f'(2)=4$ e $f(2)=4$ otteniamo

$$y-4=4(x-2) \quad , \text{ cioè } \quad y=4x-4$$

Es. 2.



L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)=1-x^2$ è

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, nel punto $(x_0,f(x_0))$. Quindi

$y-f(x_0)=-2x_0(x-x_0)$. D'altra parte il fascio di rette per il punto $(-2,0)$ è $y=m_1(x+2)$, mentre quello per il punto $(2,0)$ è $y=m_2(x-2)$.

Quindi imponendo che $m_1=-2x_0$ e $f(x_0)+2x_0^2=2m_1$

cioè $\begin{cases} m_1=-2x_0 \\ 1-x_0^2+2x_0^2=2m_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m_1=-2x_0 \\ x_0^2+1=2m_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m_1=-2x_0 \\ x_0^2+1=-4x_0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} m_1=-2x_0 \\ x_0^2+4x_0+1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m_{1_{1,2}}= 4 \mp 2\sqrt{3} \\ x_{0_{1,2}}=-2\pm\sqrt{4-1} \end{cases} \begin{matrix} -2+\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} \end{matrix}$

Si noti che se f fosse definita su $\mathbb{R}$ avremmo due rette tangenti al grafico passanti per il punto $(-2,0)$ e due rette tangenti al grafico passanti per $(2,0)$.

Poiché $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ possiamo scartare il caso di $x_0=-2-\sqrt{3}$. Quindi c'è una sola retta tangente al grafico di $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^2$, passante per $(-2,0)$ ed è quella di equazione

$$y=2(2-\sqrt{3})(x+2)$$

che si ottiene considerando $m_1=4-2\sqrt{3}$.

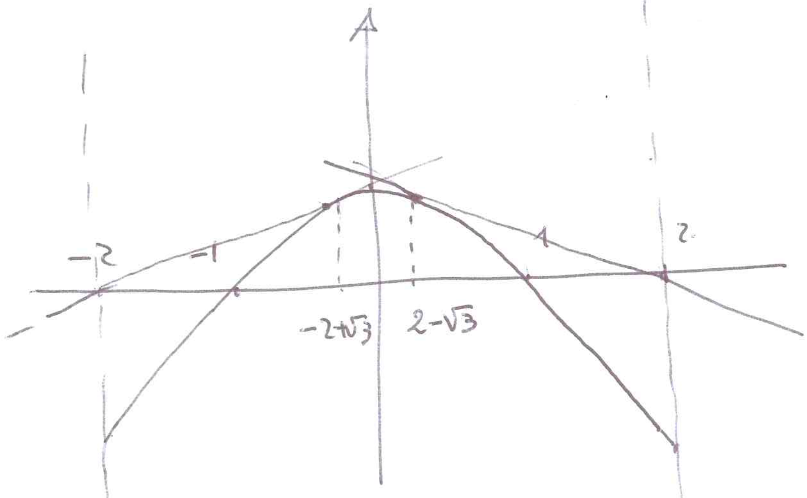
Analogamente la retta per $(2,0)$ al grafico di $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ $f(x)=1-x^2$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} m_2=-2x_0 \\ f(x_0)+2x_0^2=-2m_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m_2=-2x_0 \\ x_0^2-4x_0+1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m_2=-2(2\pm\sqrt{3}) \\ x_{0_{1,2}}=2\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

e scartando il caso $x_0=2+\sqrt{3}$ perché $2+\sqrt{3}\notin[-2,2]$.

Quindi la retta tangente al grafico e passante per $(2,0)$ è

$$y=-2(2-\sqrt{3})(x-2)$$



Esaminiamo ora la questione della derivabilità in $-2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$

della funzione $g(x) = \begin{cases} 2(2-\sqrt{3})(x+2) & ; \quad x \in [-2, -2+\sqrt{3}[\\ 1-x^2 & ; \quad x \in [-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}] \\ -2(2-\sqrt{3})(x-2) & ; \quad x \in]2-\sqrt{3}, 2] \end{cases}$

Si osservi che $2(2-\sqrt{3})(x+2)\Big|_{x=-2+\sqrt{3}} = 1-(-2+\sqrt{3})^2$ e analogamente

$-2(2-\sqrt{3})(x-2)\Big|_{x=+2-\sqrt{3}} = 1-(2-\sqrt{3})^2$, per cui g è continua

(oppure $\lim\limits_{x\to(-2+\sqrt{3})^-} g(x) = g(-2+\sqrt{3})$ e $\lim\limits_{x\to(2-\sqrt{3})^+} g(x) = g(2-\sqrt{3})$)

Per quanto riguarda la derivata prima $g'(x) = 2(2-\sqrt{3})$ se $x \in [-2, -2+\sqrt{3}[$ e $g'(x) = -2x$, se $x \in [-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}]$. Quindi, essendo g continua risulterà anche g derivabile in $x = -2+\sqrt{3}$, se $\lim\limits_{x\to(-2+\sqrt{3})^+} g'(x) = 2(2-\sqrt{3})$. Quindi g è derivabile in $-2+\sqrt{3}$.
In effetti $\lim\limits_{x\to(-2+\sqrt{3})^+} g'(x) = 2(2-\sqrt{3})$. (Si può procedere con un calcolo diretto della derivata prima in $(-2+\sqrt{3})$ in alternativa). Con un calcolo simile si prova che g è derivabile anche in $2-\sqrt{3}$. Invece per la derivata seconda si ha $g''(x) = 0$ se $x \in [-2, -2+\sqrt{3}[$, mentre $g''(x) = -2$ se $x \in [-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}]$.

Quindi g non è derivabile due volte in $-2+\sqrt{3}$, perché

$$\lim_{x\to(-2+\sqrt{3})^+} \frac{g'(x)-g'(-2+\sqrt{3})}{x-(-2+\sqrt{3})} = -2, \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to(-2+\sqrt{3})^-} \frac{g'(x)-g'(-2+\sqrt{3})}{x-(-2+\sqrt{3})} = 0,$$

quindi <u>non esiste</u> $\lim\limits_{x\to(-2+\sqrt{3})} \dfrac{g'(x)-g'(-2+\sqrt{3})}{x-(-2+\sqrt{3})}$.