Correzione del compito del 3/11/2014

Es 1 f è continua in $[0,+\infty[$ perché prodotto di funzioni continue ed è continua in $x<0$ perché $f|_{]-\infty,0[}$ è continua. Inoltre

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -49 = f(0)$. Quindi $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

f è derivabile in $]-\infty,0]$ perché $f|_{]-\infty,0]} = 14x-49$ è derivabile in $]-\infty,0]$. Inoltre f è derivabile in $[0,+\infty[\setminus\{7\}$ perché in tale insieme è prodotto di funzioni derivabili.

In particolare f sarà derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0,7\}$ e su tale insieme

$$f'(x) = \begin{cases} |x-7| + \operatorname{sgn}(x-7)(x-7) = 2|x-7| \ ; & x>0,\ x\neq 7 \\ 14 \ ; & x<0 \end{cases}$$

Se $x=0$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x-7)^2+49}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+14x}{x} = 14$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{14x \cancel{-49} \cancel{+49}}{x} = 14.$

Quindi f è derivabile in 0 e $f'(0)=14$.

Infine $\lim_{x\to 7} \frac{f(x)-f(7)}{x-7} = \lim_{x\to 7} \frac{\cancel{(x-7)}|x-7|}{\cancel{x-7}} = 0$, quindi f è derivabile in 7 e $f'(7)=0$. Pertanto f è derivabile in $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la derivata seconda f è derivabile due volte in $\mathbb{R} \setminus \{0,7\}$ perché $f'|_{\mathbb{R} \setminus \{0,7\}}$ è derivabile essendo $f'|_{]0,+\infty[\setminus\{7\}} = 2|x-7|$ e $f'|_{]-\infty,0[} = 14$.

entrambe derivabili per $x \neq 7$ e $x \neq 0$.

In particolare

$$f''(x) = \begin{cases} 2|x-7| \quad, & x>0 \text{ e } x \neq 7 \\ 14 \quad, & x<0. \end{cases}$$

Tuttavia $\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2|x-7|-14}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x+\cancel{14}-\cancel{14}}{x} = -2$, mentre

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{14-14}{x} = 0$. Quindi

f non è derivabile due volte in 0.

Infine f non è derivabile due volte in 7 perché non esiste la derivata di f' in 7, essendo $f'(x)=2|x-7|$ una funzione non derivabile in 7.

Quindi f è derivabile due volte soltanto in $\mathbb{R}\setminus\{0,7\}$.

Es 2.

Sia $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

f è derivabile in $]0,+\infty[$, perché somma di funzioni derivabili rispettivamente ottenute come composizioni di funzioni derivabili. Allora per $x>0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \cancel{\frac{1}{x^2}\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Quindi f = costante in $]0,+\infty[$. In particolare

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi $f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in]0,+\infty[$.

Esercizio 3

$\arctan\left(\frac{x-1}{|x+1|+2}\right)$ è correttamente definita su $\mathbb{R}$

perché composizione tra $x \longmapsto \frac{x-1}{|x+1|+2}$, definita su $\mathbb{R}$ (infatti $|x+1|+2>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$) e $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ in quanto l'immagine di $\frac{x-1}{|x+1|+2}$ è contenuta in $\mathbb{R}$.

Pertanto $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{|x+1|+2}\right)$.

Inoltre f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, perchè composizione di funzioni derivabili rispettivamente in $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e in $\mathbb{R}$. In particolare $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{|x+1|+2}\right)^2} \cdot \frac{|x+1|+2-(x-1)\,\mathrm{sgn}(x+1)}{(|x+1|+2)^2}.$$

Studiamo la monotonia di f determinando il segno di f' in $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. In particolare

$$\begin{cases} f' > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |x+1|+2-(x-1)\,\mathrm{sgn}(x+1) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ \cancel{-1}\cancel{-x}+\cancel{2}+\cancel{x}\cancel{-1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -1 \\ \cancel{x}+1+2\cancel{-x}+1 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ 0 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -1 \\ 3 > 0. \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$S = \emptyset \qquad\qquad x \in \left]-1, +\infty\right[$$

Tuttavia, attenzione! Se $x \leq -1$ $f(x) = \arctan \frac{x-1}{-x-1+2}$

$= \arctan\left(\frac{x-1}{-x+1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, cioè

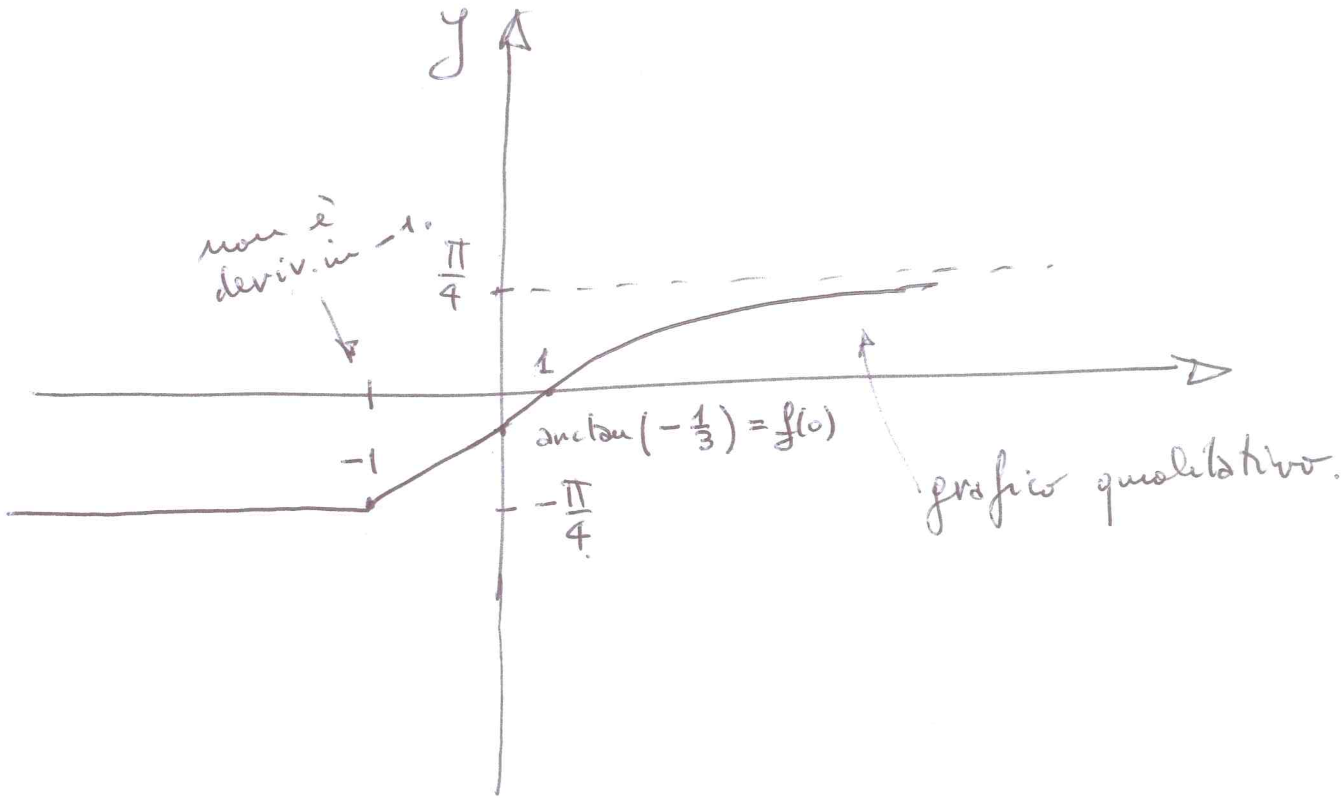
f è costante se $x \leq -1$, ovvero $f'(x) = 0$ per

ogni $x < -1$.

Quindi f è costante in $]-\infty, -1]$ e monotona

strettamente crescente in $[-1, +\infty[$. Infine

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$



Eser. 4. f è definita in $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x+1}{|x-1|} \right| > 1 \right\} \cup \{1\} \right)$,

cioè sapendo che $\left| \frac{x+1}{|x-1|} \right| \leq 1 \iff |x+1| \leq |x-1|$

$$\iff \begin{cases} x+1 \leq |x-1| \\ -|x-1| \leq x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x \leq 0$$

Quindi $f: \,]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{|x-1|} \right)$

f è derivabile in $]-\infty, 0]$ perché composizione di funzioni derivabili in $]-\infty, 0]$ e $\forall x \in \,]-\infty, 0]$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{|x-1|} \right)^2}} \cdot \frac{|x-1| - \operatorname{sgn}(x-1) \cdot (x+1)}{|x-1|^2};$$

quindi

$$\begin{cases} f' > 0 \\ x \in \,]-\infty, 0] \end{cases} \iff \begin{cases} |x-1| - \operatorname{sgn}(x-1) \cdot (x+1) > 0 \\ x \in \,]-\infty, 0] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{-x}+1 + \cancel{x}+1 > 0 \\ x \in \,]-\infty, 0] \end{cases} \quad \begin{cases} 2 > 0 \\ x \in \,]-\infty, 0] \end{cases} \iff x \in \,]-\infty, 0].$$

Quindi f è strettamente crescente in $]-\infty, 0]$.

Si noti inoltre che $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

Quindi un grafico qualitativo di f è: