Correzione

Concludere che la relazione è d'ordine dobbiamo provare che è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

(i) per ogni $B \in \mathcal{P}(A)$: $B \subseteq B$, cioè $\subseteq$ è riflessiva

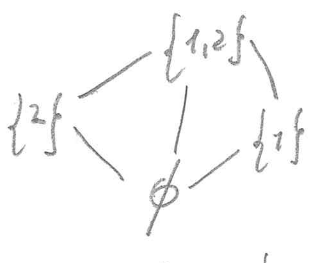
(ii) per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(A)$: se $B_1 \subseteq B_2$ e $B_2 \subseteq B_1$ allora $B_1 = B_2$, cioè $\subseteq$ è antisimmetrica

(iii) per ogni $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{P}(A)$: se $B_1 \subseteq B_2$ e $B_2 \subseteq B_3$ allora $B_1 \subseteq B_3$, cioè $\subseteq$ è transitiva

Quindi $\subseteq$ è una relazione d'ordine. Tuttavia non è una relazione d'ordine totale. Infatti esistono insiemi appartenenti a $\mathcal{P}(A)$ che non sono in relazione tra loro.

Sia $\# A \geq 2$, $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$.
$\{a_1\}, \{a_2\} \in \mathcal{P}(A)$ tuttavia $\{a_1\} \nsubseteq \{a_2\}$ e $\{a_2\} \nsubseteq \{a_3\}$.

Esempio $A = \{1,2\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$



$\{1\}$ e $\{2\}$ non sono in relazione d'inclusione.

Ripetere la costruzione con $A = \{1,2,3\}$.

La cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è $2^{\#A}$.

Se $\#A = 2$ abbiamo già verificato che $\#\mathcal{P}(A) = 4$.

Supponiamo che ciò sia vero per ogni insieme di cardinalità minore o uguale a k.
Proviamo che se $\#A = k+1$ allora $\#\mathcal{P}(A) = 2^{k+1}$.

Se $\#A = k+1$, allora $A = A_k \cup \{e_{k+1}\}$. Per ciascuno degli insiemi appartenenti a $\mathcal{P}(A_1)$ possiamo costruirne un nuovo insieme unendo al precedente l'insieme $\{e_{k+1}\}$. In questo modo raddoppiamo il numero degli insiemi di $\mathcal{P}(A_1)$. Quindi $\#\mathcal{P}(A) = 2 \cdot \#\mathcal{P}(A_1) = 2 \cdot 2^{\#A_1}$
$= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = 2^{\#A}$. In particolare si osservi $\mathcal{P}(A)$ uguale all'unione di $\mathcal{P}(A_1)$ con l'insieme degli insiemi ottenuti con la procedura prima descritta.

Esercizio

$\{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato perché $\frac{n-2}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1$. Inoltre è anche inferiormente limitato perché $-2 \leq \frac{n-2}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi per R4 $\exists \sup\{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} \leq 1$
e $\exists \inf\{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} \geq -2$.

D'altra parte, poiché $-2 \in \{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$

$$-2 = \min \{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} = \inf \{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in$$

Inoltre possiamo chiederci se esistono maggioranti di $\{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ che siano minori di 1.

Infatti ciò accadrà se esiste $M = 1 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ da fissare t.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\frac{n-2}{n+1} \le 1 - \varepsilon$.

Ciò accade se $\cancel{n} - 2 \le \cancel{n} + 1 - \varepsilon(n+1) \iff -3 \le -\varepsilon(n+1)$

$\iff 3 \geq \varepsilon(n+1) \iff \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon} \geq n$. Quindi per ogni $n > \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$ la nostra richiesta $\left(\frac{n-2}{n+1} \le 1-\varepsilon\right)$ non è soddisfatta per infiniti numeri naturali qualunque sia il numero $\varepsilon > 0$, fissato.

Si osservi inoltre che $1 \notin \{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$

Infatti se $1 = \frac{n-2}{n+1} \rightarrow \cancel{n}+1 = \cancel{n}-2 \longrightarrow 1 = -2$ falso.

Quindi <u>non esistono $n \in \mathbb{N}$ t.c.</u> $\frac{n-2}{n+1} = 1$.

Allora 1 è un maggiorante; in particolare è il minimo dei maggioranti, cioè è l'estremo superiore di $\{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Inoltre $\{q \in \mathbb{R} : q = \frac{n-2}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ <u>non ha massimo.</u>