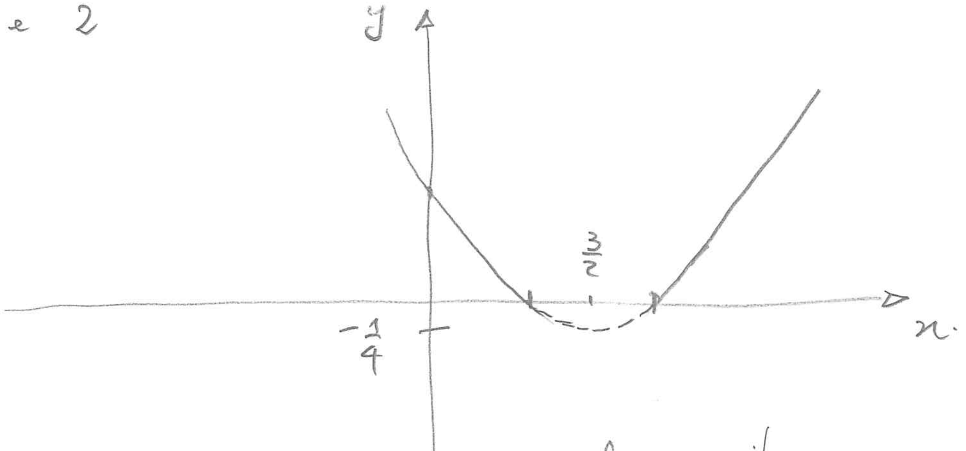
Correzione (esercitazione del 29/09/2014)

(1) $$|x^2-3x+2|<\frac{1}{2} \iff \begin{cases} x^2-3x+2<\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}<x^2-3x+2 \end{cases} \iff$$

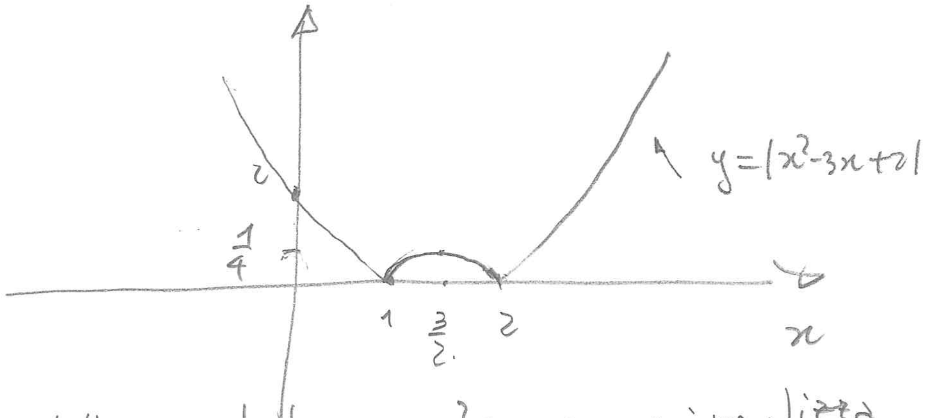
$$\iff \begin{cases} x^2-3x+\frac{3}{2}<0 \\ 0<x^2-3x+\frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{9-6}}{2} \\ x\in\mathbb{R} \quad (\text{infatti } \Delta = 9-10<-1) \end{cases}$$

$$\iff \qquad x\in \left]\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right[$$

Se ne apprezzi l'interpretazione geometrica. $y=x^2-3x+2$ è l'equazione di una parabola che interseca l'asse delle ascisse in 1 e 2



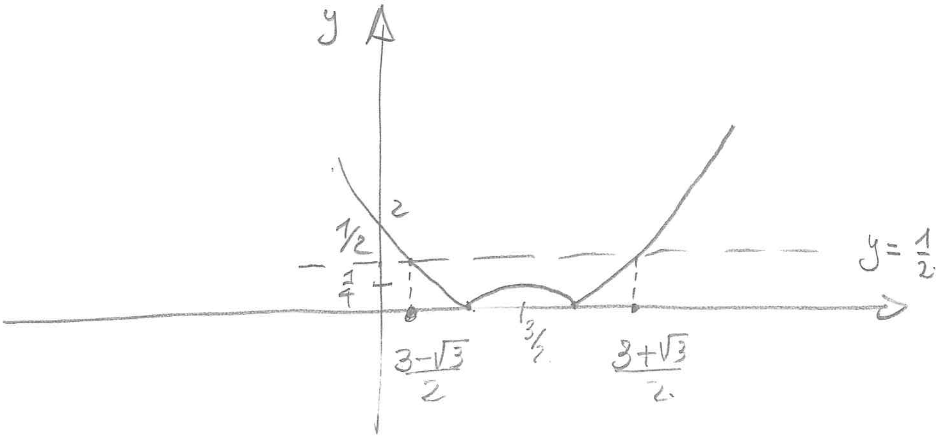
$y=|x^2-3x+2|$ ha come grafico il seguente



Il vertice della parabola $y=x^2-3x+2$ si realizza per $x=\frac{3}{2}$

Quindi per $x=\frac{3}{2}$ la funzione $x\longmapsto |x^2-3x+2|$ vale $\frac{1}{4}$

Pertanto $|x^2-3x+2|<\frac{1}{2}$ è risolta dai numeri reali per cui le ordinate di $f(x)=|x^2-3x+2|$ sono minori di $\frac{1}{2}$



(ii) $|x^2-3x+2|<2 \iff \begin{cases} x^2-3x+2<2 \\ -2<x^2-3x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-3x<0 \\ 0<x^2-3x+4 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x(x-3)<0 \\ x\in\mathbb{R} \quad (\text{infatti } \Delta>0) \end{cases} \iff \begin{cases} x\in\,]0,3[\\ x\in\mathbb{R} \end{cases} \iff x\in\,]0,3[$

(iii) $\sqrt{|x^2-3x+2|}<-x^2-x-1 \iff \begin{cases} -x^2-x-1\geq 0 \\ |x^2-3x+2|<(x^2+x+1)^2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \emptyset \quad (\Delta<0 \text{ e } -1 \text{ coeff di } x^2 \text{ è neg.}) \\ |x^2-3x+2|<(x^2+x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow S=\emptyset$

(iv) $\sqrt{|x^2-x+2|}<x \iff \begin{cases} x\geq 0 \\ |x^2-x+2|<x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 0 \\ -x^2<x^2-x+2<x^2 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -2x^2 < -x+2 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2-x+2>0 \\ x>2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \ (\Delta<0 \\ x>2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad S = \left]2,+\infty\right[.$$

Es. 2

A_1 è superiormente e inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ infatti $A_1 = \left]0,1\right[$ e per ogni $x \in A_1$ $0 \leq x \leq 1$. Inoltre $\sup A_1 = 1$, $\inf A_1 = 0$. Tuttavia A_1 non ha né minimo né massimo.

$A_2 = \left[0,1\right[$ $\sup A_2 = 1$, $\inf A_2 = 0$. Inoltre $\min A_2 = \inf A_2 = 0$. Mentre non esiste massimo.

A_3 non è superiormente limitato. Infatti, se lo fosse $\exists$ $M>0$ (non è restrittivo fare questa ipotesi) t.c. $\frac{n^2-1}{n+1} < M$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$n^2-1 < M(n+1) \Longleftrightarrow n^2 - Mn - 1 - M < 0$, ma $\Delta = M^2+4+4M > 0$. Quindi la disequazione è soddisfatta per ogni n t.c. $-1 < n < M+1$, $n \in \mathbb{N}$.
Ciò significa che la disequazione non è soddisfatta per ogni $n > M+1$. Quindi indipendentemente dal valore di M posso trovare un numero $q \in A_3$ (in realtà sono infiniti) che non soddisfa la disuguaglianza precedente.

Ciò significa che A_3 non è superiormente limitato

A_3 è inferiormente limitato, non solo, $-1 = \min A_3$.

(3) Può essere nuovamente calcolare $\#\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2,\ q = q_0, q_1 q_2 q_3\}$ e con q_1, q_2, q_3 cifre decimali in $\{0, 1, \dots, 9\}$ e $q_0 \in \mathbb{Z}$. Infatti $q_0 \in \{-1, 0, 1\}$, mentre q_1, q_2, q_3 sono cifre appartenenti a $\{0, 1, \dots, 9\}$. Quindi abbiamo 10^3 combinazioni con ripetizione e

$$\#\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2,\ q = q_0, q_1 q_2 q_3\} = 3 \cdot 10^3$$

Trattandosi di un insieme di cardinalità finita (di numeri reali) ha massimo. Per determinarlo procediamo in questo modo. Se $q = q_0$ (cioè non ci sono decimali) $q_0 = 1$ perché $q_0^2 = 1^2 < 2$, mentre il successivo intero, 2, non soddisfa $2^2 < 2$.

Se $q = q_0, q_1$ (una sola cifra decimale) abbiamo 9 possibilità $q = 1,1$; $q = 1,2$; $q = 1,3$ ecc. Tuttavia $q^2 = (1,2)^2 = 1,44$, $q^2 = (1,3)^2 = 1,69$, $q^2 = (1,4)^2 = 1,96$, mentre $q^2 = (1,5)^2 = 2,25$.

Quindi passando con questa procedura alla seconda e poi alla terza cifra decimale otteniamo che

$$\max\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2,\ q = q_0, q_1 q_2 q_3\} = 1,414$$

Si noti che $\{q \in \mathbb{Q} : q > \sqrt{2} - 10^{-3}, q^2 < 2\}$ pur essendo limitato non ha massimo, perché $\sqrt{2}$ è irrazionale, quindi ha una rappresentazione decimale data da $q_0, q_1 q_2 q_3 \cdots q_n \cdots$ $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di cifre appartenenti all'insieme $\{0,1,2,3 \dots\}$ che non si ripetono periodicamente. Allora

$\sqrt{2} - 0{,}001 = q_0, q_1 q_2 (q_3 - 1) q_4 q_5 \cdots q_n \cdots$ e l'insieme

$[\sqrt{2} - 0{,}001, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$ che è numerabile ha estremo superiore in $\mathbb{R}$ e $\sup [\sqrt{2} - 0{,}001, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} = \sqrt{2}$, ma $\sqrt{2} \notin \{q \in \mathbb{Q} : q > \sqrt{2} - 10^{-3}, q^2 < 2\}$.