Correzione

- Se $0<q<1$ allora $|q^n|<\varepsilon \iff q^n<\varepsilon \iff n\log q<\log\varepsilon \iff$
$n>\frac{\log\varepsilon}{\log q}$ (perché $\log q<0$) Ricordiamo che $\log q=\log_e q$.

Quindi posto $\bar{n}(\varepsilon)=\left[\frac{\log\varepsilon}{\log q}\right]$ (la parentesi quadra è la parte intera del numero $[x]=\max\{q\in\mathbb{Z}:\ q\le x\}$)

possiamo concludere che
$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \bar{n}(\varepsilon)\ :\ |q^n|<\varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>\bar{n}(\varepsilon).$

- Se $q\in]-1,0[$ allora $|q^n|=|q|^n<\varepsilon$
procedendo come prima potremo concludere che
$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \bar{n}(\varepsilon)\ :\ |q^n|<\varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>\bar{n}(\varepsilon).$
In questo caso però $\bar{n}(\varepsilon)=\left[\frac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right]$

- Se $q=0$ $q^n=0$ e quindi è immediato concludere che $\lim_{n\to+\infty}q^n=0$.

- Se $q=1$ allora $q^n=1$ e pertanto
$|q^n-1|=0<\varepsilon$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, cioè $\bar{n}(\varepsilon)=0$.

- Se $q>1$ allora $q^n>M \iff$ (consideriamo $M>0$)
$n\log q>\log M \iff n>\frac{\log M}{\log q}$ (questa volta $\log q>0$ perché $q>1$)
Quindi $\bar{n}(M)=\left[\frac{\log M}{\log q}\right]$. Pertanto $\lim_{n\to+\infty}q^n=+\infty$

- Se $q=-1$ non esiste limite. Infatti $|(-1)^n|=1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la successione non può divergere perché è limitata. Inoltre se esistesse $l \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ otterremmo immediatamente una contraddizione con la definizione di limite. Infatti se $|(-1)^n - l| < \varepsilon$ e $l > 1$ allora la prima disuguaglianza è
$l-\varepsilon < (-1)^n < l+\varepsilon$
falsa per ogni indice dispari e per ogni $\varepsilon > 0$. Analogamente se $l < -1$, la seconda disuguaglianza non è verificata per ogni indice pari. Se $-1 < l < 1$ abbiamo lo stesso tipo di contraddizione scegliendo opportunamente gli indici pari e dispari. Infine se $l = \pm 1$ si procede nello stesso modo; e.g.: se $l = 1$ $|(-1)^n - 1| = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Quindi non può essere $\varepsilon < 2$: $|(-1)^n - 1| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}(\varepsilon)$ perché in $\mathbb{N}$ vi sono infiniti numeri dispari.

- Se $q < -1$ la successione $\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è limitata.
Infatti la sottosuccessione $\{q^{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è positivamente divergente perché $q^{2k} = (q^2)^k$ con $q^2 > 1$.
Inoltre non esisterà il limite perché anche $\{q^{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di q^n, ma $\lim_{k \to +\infty} q^{2k+1} = -\infty$, perché $\lim_{k \to +\infty} q^{2k+1} = \lim_{k \to +\infty} q \cdot q^{2k} = q \cdot \lim_{k \to +\infty} q^{2k} = -\infty$.
Quindi per l'unicità del limite si ottiene una contraddizione.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3-3n}{4n^4-2n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(5-\frac{3}{n^2}\right)}{n^4\left(4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{5-\frac{3}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{algebra dei limiti}}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{5-\overbrace{\frac{3}{n^2}}^{\to 0}}{4-\underbrace{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}}_{\downarrow\, 0}}$$

$$= 0\cdot\frac{5}{4} = 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)\cdot\overbrace{\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}^{\substack{1\\ \shortparallel}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}-1-\cancel{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = 0,$$

perché $\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

[Se non si fosse convinti che $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$, la verifica è immediata $\sqrt{n} > M \iff n > M^2$.
Quindi $\bar{n}(M) = [M^2]$, cioè $\forall M>0\ \forall n\in\mathbb{N}$
se $n > [M^2]$, allora $\sqrt{n} > M$, cioè $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-7n^7+n}{6n^6-5} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^7\left(-7+\frac{1}{n^6}\right)}{n^6\left(6-\frac{5}{n^6}\right)} = \lim_{n\to+\infty} n\,\frac{-7+\frac{1}{n^6}}{6-\frac{5}{n^6}}$$

$= -\infty$, perché $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{-7+\frac{1}{n^6}}{6-\frac{5}{n^6}} = -\frac{7}{6}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-4}\right)\cdot\sqrt{n+3} = \lim_{n\to+\infty}\overbrace{\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-4}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-4}}}^{=1}\cdot\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-4}\right)\cdot\sqrt{n+3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}-1-\cancel{n}+4}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-4}}\cdot\sqrt{n+3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n+3}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-4}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 3\cdot\frac{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}\right)} \underset{\text{alg. limiti}}{=} 3\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}$$

$$\underset{\text{alg. lim}}{=} 3\cdot\frac{\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{n}}} = 3\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Se $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+a_n} = 1$ per ogni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima (cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$).

Infatti se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+a_n} = 1$ perché $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+a_n} = 1 \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\,\bar{n}(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

$$\left|\sqrt{1+a_n}-1\right| < \varepsilon, \quad \forall n\in\mathbb{N},\quad n>\bar{n}(\varepsilon).$$

In particolare $\left|\sqrt{1+a_n}-1\right| < \varepsilon \iff$

$$1-\varepsilon < \sqrt{1+a_n} < 1+\varepsilon.$$

Verifichiamo il caso in cui $\varepsilon<1$, altrimenti la prova è banale. Se $0<\varepsilon<1$ allora le precedenti disequazioni sono equivalenti a richiedere

$$(1-\varepsilon)^2 < 1+a_n < (1+\varepsilon)^2,$$

ovvero $(1-\varepsilon)^2-1 < a_n < (1+\varepsilon)^2-1$. La prima è sempre verificata, la seconda sarà verificata per ogni $n>\bar{n}\left((1+\varepsilon)^2-1\right)$ dove $\bar{n}$ è l'indice le cui esistenza discende dall'ipotesi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$