Correzione

Ricordiamo che $\binom{n}{k}$, $n,k\in\mathbb{N}$, $k\leq n$ è il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Se $n=1$ $\quad (a+b)=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \binom{1}{0}a^0b^1+\binom{1}{1}ab^0 = b+a.$

Supponiamo che la formula valga per ogni $k\leq n$.

Allora

$$(a+b)^{n+1} = \overbrace{(a+b)^n(a+b) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}}^{\text{ipotesi induttiva}}(a+b) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$

$k+1=J$

$k=J-1$

$$= \sum_{J=1}^{n+1}\binom{n}{J-1}a^J b^{n-J+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$

$$= \underbrace{\sum_{J=1}^{n}\binom{n}{J-1}a^J b^{n-J+1}} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^{\cancel{n-n-1+1}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{J=1}^{n}\left(\binom{n}{J-1}+\binom{n}{J}\right)a^J b^{n-J+1} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{J=1}^{n}\left(\frac{n!}{(J-1)!\,(n-J+1)!}+\frac{n!}{J!\,(n-J)!}\right)a^J b^{n-J+1} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{J=1}^{n}\frac{J\,n! + (n-J+1)\,n!}{J!\,(n-J+1)!}a^J b^{n-J+1} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{J=1}^{n}\frac{n!\,(\cancel{J}+n-\cancel{J}+1)}{J!\,(n-J+1)!}a^J b^{n-J+1} + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{J=1}^{n}\frac{(n+1)!}{J!\,(n+1-J)!}a^J b^{n-J+1} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{J=1}^{n}\binom{n+1}{J}a^J b^{n-J+1} + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{J=0}^{n+1}\binom{n+1}{J}a^J b^{n+1-J}$$

$\boxtimes$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad , \quad q \neq 1$$

Se $n=0$ $\quad \sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ $\quad$ vale

Supponiamo che sia vera per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$.

Allora

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} q^j + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{\text{ipotesi induttiva}} + q^{n+1} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}. \qquad \boxtimes$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$ Se $n=0$

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = 0 \quad \text{vale}$$

Supponiamo che le formule sia vere per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$. Allora

$$\sum_{j=0}^{n+1} k^2 = \overbrace{\sum_{j=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}^{\text{ipotesi induttive}} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

ma $\Delta = 49-48=1$ quindi $2x^2+7x+6=0 \iff$

$x_1 = \frac{-7+1}{4} = \frac{-3}{2}$, $x_2 = \frac{-7-1}{4} = -2$; quindi $2n^2+7n+6 = 2\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)$

$$= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(2(n+1)+1)(n+1+1)}{6}. \qquad \boxtimes$$

(i)

$\forall\, \bar{x} \in [0,1[\qquad \exists \{x_n\} \subset [0,1[\setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$.

Infatti se $\bar{x}=0$, allora $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ è infinitesima

cioè $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}} \subset [0,1[$.

Mentre se $\bar{x} \in]0,1[$, allora $x_n = \bar{x} - \frac{1}{n} \in]0,1[$ se e solo:

$0 < \bar{x} - \frac{1}{n} < 1 \iff \bar{x} > \frac{1}{n}$ e $\bar{x} - 1 < \frac{1}{n} \iff$

$n > \frac{1}{\bar{x}}$ e $n > \frac{1}{\bar{x}-1} \iff n > \frac{1}{\bar{x}}$. Quindi

per ogni $n > \frac{1}{\bar{x}}$, $x_n = \bar{x} - \frac{1}{n} \in]0,1[\setminus \{\bar{x}\}$ e

$\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$. Cioè $\mathcal{D}([0,1[) = [0,1]$

(ii) $\mathcal{D}([0,1[\cup \{3\}) = [0,1]$. Infatti per ogni $x \in [0,1[$

possiamo procedere come in (i), cioè $[0,1] \subseteq \mathcal{D}([0,1[\cup \{3\})$.

D'altra parte, se $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ e esiste

$\{x_n\} \subset ([0,1[\cup \{3\}) \setminus \{\bar{x}\}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ allora

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \quad |x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n > \bar{n}(\varepsilon)$.

Quindi $\bar{x} - \varepsilon < x_n < \varepsilon + \bar{x}$, $\forall n \in \mathbb{N} \;\; n > \bar{n}(\varepsilon)$.

Nel caso in cui $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, $\bar{x} > 1$ e $\bar{x} \neq 3$ allora

fissando $\varepsilon = \frac{\bar{x}-1}{2}$, risulterà $\bar{x} - \frac{\bar{x}-1}{2} < x_n$

cioè $\frac{\bar{x}+1}{2} < x_n$, ma allora $1 < \frac{\bar{x}+1}{2} < x_n$

e quindi non potrà essere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset ([0,1[\cup\{3\})\setminus\{\bar{x}\}$

e $x_n \to \bar{x}$.

Analogamente se $\bar{x} < 0$, fissando $\bar{\varepsilon} = \frac{-\bar{x}}{2}$

risulterà $x_n < \bar{x} + \frac{-\bar{x}}{2} = \frac{\bar{x}}{2} < 0$ per ogni

$n > n(\bar{\varepsilon})$; quindi $\lim_{n\to+\infty} x_n \leq \frac{\bar{x}}{2} < 0$ assurdo.

Infine se $\bar{x} = 3$ allora dovrebbe esistere

$\{x_n\} \subset ([0,1[\cup\{3\})\setminus\{3\} = [0,1[$ t.c.

$\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$, ma ciò è assurdo, perché

$x_n < 1$ e quindi se esistesse $\lim_{n\to+\infty} x_n = l \leq 1$

assurdo.

iii) $D(]0,2[\cup]2,3]) = [0,3]$.

Se $\bar{x} \in]0,2[$ procediamo come nel caso i). Quindi

$[0,2] \subset D(]0,2[\cup]2,3])$. Se $\bar{x} \in]2,3]$,

come al solito possiamo considerare $x_n = \bar{x} - \frac{1}{n}$

richiedendo che $\bar{x} - \frac{1}{n} > 2 \iff \bar{x} - 2 > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\bar{x}-2}$.

Quindi se $n > \frac{1}{\bar{x}-2}$, allora $x_n = \bar{x} - \frac{1}{n} \in]2,3]$ con

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \bar{x} - \frac{1}{n} = \bar{x}$$ cioè

$$[0,2]\cup[2,3] = [0,3] \subseteq \mathcal{D}(]0,2[\cup]2,3[)$$

Infine $[0,3] = \mathcal{D}(]0,2[\cup]2,3[)$ procedendo come nella parte finale di (ii).

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ è continua in ogni punto del dominio. Infatti, per ogni $\bar{x}\in\mathbb{R}$ e $\forall \{x_n\}\subset\mathbb{R}$. Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n^2 = \Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big)^2 = \bar{x}^2 = f(\bar{x}).$$

algebra dei limiti