Correzione

(i) La funzione $\sqrt{\ }: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è continua in ogni punto del suo dominio. La continuità è una proprietà locale, quindi f sarà continua in ogni punto diverso da 3, perché $f(x) = \sqrt{x}$ per ogni $x \neq 3$.

Nel punto $x=3$ che è di accumulazione ed appartiene al dominio sarà sufficiente verificare se $\exists \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

In questo caso $\lim_{x\to 3} f(x) = \sqrt{3} \neq f(3) = 4$.

Quindi f non è continua in 3, ma è continua in ogni punto $x_0 \in [0,+\infty[\setminus \{3\}$.

(ii) La funzione f è continua in $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$ perché $f_{|]-\infty,0[} = -3x_{|]-\infty,0[}$, $f_{|]0,1[} = 2x_{|]-\infty,0[}$ e $f_{|]1,+\infty[} = x^2-2x+3_{|]1,+\infty[}$, le quali, essendo polinomi sono continue in ogni punto del loro dominio.

Esaminiamo i punti 0 e 1. (che sono di accumulazione) Per ogni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$ perché

$$|f(x_n)| \leq \max\{3|x_n|, 2|x_n|\} = 3|x_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

. Inoltre $f(0)=0$

Quindi la funzione f è continua in 0. Per ogni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$, allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 2$. Infatti

$$|f(x_n)-2| \leq \max\{|2x_n-2|, |x_n^2-2x_n+3-2|\}$$

$$= \max\{2|x_n-1|, |x_n^2-2x_n+1|\} = 2|x_n-1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

per $n\to+\infty$ perché $|x_n^2-2x_n+1| = (x_n-1)^2$

che è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $2|x_n-1|$.

Quindi f è continua in $\mathbb{R}$.

(iii) f è continua in $]0,1[$ e in $]1,3]$ perché

$$f_{|]0,1[} = x^3_{|]0,1[} \quad e \quad f_{|]1,3]} = 2-x_{|]1,3]}$$

dove $x^3_{|]0,1[}$ e $2-x_{|]1,3]}$ sono funzioni continue.

Rimane da esaminare il caso $x=1$.

Per ogni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,3]$. Se $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1 = 1^3 = f(1). \text{ Infatti}$$

$$|f(x_n)-1| \leq \max\left\{|x_n^3-1|, |2-x_n-1|\right\} = \max\left\{|x_n^3-1|, |x_n-1|\right\}$$

$$= \max\left\{|x_n-1||x_n^2+x_n+1|, |x_n-1|\right\} \leq 3|x_n-1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$. Cioè f è continua su $]0,3]$.

(IV) Per ogni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\setminus\{2\}$ Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$, allora

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2+x_n-6}{x_n^2-9} = 0$. D'altra parte, x^2+x-6 è continua su $\mathbb{R}$,

x^2-9 è continua su $\mathbb{R}$, quindi è continua $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$ su

$\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. In particolare $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-9} = \dfrac{4+2-6}{4-9} = 0$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^3-2} - \sqrt{x+4}}{x^3-x-6}$$

$\sqrt{x^3-2} - \sqrt{x+4}$ è continua in $[2,+\infty[$

x^3-x-6 è continua in $\mathbb{R}$, ma in 2 il numeratore e il denominatore si annullano.

Quindi non possiamo applicare l'algebra dei limiti.

Allora

$$\frac{\sqrt{x^3-2} - \sqrt{x+4}}{x^3-x-6} = \frac{x^3-2-x-4}{\sqrt{x^3-2}+\sqrt{x+4}} \cdot \frac{1}{(x-2)(x^2+2x+3)}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - x - 6 & x-2 \\ \hline
-x^3+2x^2 & x^2+2x+3 \\
// \quad 2x^2-x-6 & \\
\quad -2x^2+4x & \\
\quad // \quad 3x-6 & \\
\quad\quad -3x+6 & \\
\quad\quad // \quad // &
\end{array}$$

$$= \frac{\cancel{x^3-x-6}}{\sqrt{x^3-2}+\sqrt{x+4}} \cdot \frac{1}{\cancel{x^3-x-6}}$$ allora dalla continuità

di $\sqrt{x^3-2}+\sqrt{x+4}$ segue che

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^3-2} - \sqrt{x+4}}{x^3-x-6} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^3-2}+\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}. \quad \square$$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{2}$ è continua in $[-1,+\infty[$; $x+1$ è continua in $\mathbb{R}$, tuttavia mentre il numeratore non si annulla il denominatore si annulla (mantenendosi positivo)

Quindi $\lim_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x+1} = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x}-3x^3+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}$$

perché $1+x^2 = o(x^3)$ per $x \to +\infty$ e

$\sqrt{5}+5 = o(-3x^3)$ per $x \to +\infty$.