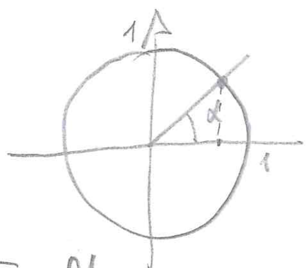
Correzione

<u>Es. 1</u> per ogni $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin\alpha + \cos\alpha \geq 1$, infatti



per la disuguaglianza triangolare

$\sin\alpha + \cos\alpha \geq 1$.

Inoltre $0 \leq \sin\alpha \leq 1 - \cos\alpha$, per ogni $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Quindi per ogni $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$

$$0 \leq \sin(-\alpha) \leq 1 - \cos(-\alpha) \iff -\sin\alpha \leq 1 - \cos\alpha$$

perché sin è dispari, mentre cos è pari.

Da ciò segue che per ogni $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \cup [0, \frac{\pi}{2}]$

$$|\sin\alpha| \leq 1 - \cos\alpha$$

Inoltre $1 - \cos\alpha \leq 1$. Quindi per ogni $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$|\sin\alpha| \leq 1 - \cos\alpha \leq 1$$

Applicando il Teorema dei due Carabinieri risulta

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 - \cos\alpha) = 0 \quad , \text{ perché}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} |\sin\alpha| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha \to 0} 1 = 1. \quad \text{Quindi}$$

$$\exists \lim_{\alpha \to 0} \cos\alpha = 1.$$

Esercizio 2

(i) $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}\right)\sqrt{3x+2} = \dfrac{\cancel{x}+3-\cancel{x}-7}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}} \cdot \sqrt{3x+2}$

Quindi $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}\right)\sqrt{3x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-4\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -4\dfrac{\sqrt{3x+2}}{2\sqrt{x}}$

perché $\sqrt{x+3} \sim \sqrt{x+7} \sim \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$

e $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}\right)\sqrt{3x+2} = \lim_{x\to+\infty} -2\dfrac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{3}$,

perché $\sqrt{3x+2} \sim \sqrt{x}$, $x \to +\infty$.

(ii) $\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-7}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+7}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2x+4}}{\sqrt{5x-2}} = \dfrac{(\cancel{x}+7-\cancel{x}+7)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+7}\right)\sqrt[3]{2x+4}}{\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+\sqrt[3]{(x+7)(x-7)}+\sqrt[3]{(x-7)^2}\right)(\cancel{x}+1-\cancel{x}-7)\sqrt{5x-2}}$

$= \dfrac{14\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+7}\right)\sqrt[3]{2x+4}}{-6\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+\sqrt[3]{(x+7)(x-7)}+\sqrt[3]{(x-7)^2}\right)\sqrt{5x-2}}$

Allora

$\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-7}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+7}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2x+4}}{\sqrt{5x-2}} \sim -\dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{2\cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot x^{1/3}}{3x^{2/3} \cdot \sqrt{5}\,\cancel{x^{1/2}}}$

$\underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{14\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{5}\,x^{1/3}}$. Quindi $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-7}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+7}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2x+4}}{\sqrt{5x-2}} =$

(iii) $\dfrac{e^{3x}+x^{50}}{e^{3x+2}+\left(x+\frac{1}{x}\right)x^{49}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{3x}}{e^2 \cdot e^{3x}}$

Quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+x^{50}}{e^{3x+2}+\left(x+\frac{1}{x}\right)x^{49}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{e^2 \cdot e^{3x}} = \dfrac{1}{e^2}$

(iv) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-6}$; x^2+5x+6 è continua e si annulla per $x=-3$; x^2+x-6 è continua e si annulla per $x=-3$.

Non possiamo applicare il Teorema sull'algebra delle funzioni continue. Tuttavia, per ogni $x \neq -3$, in un intorno di -3,

$\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-6} = \dfrac{x+2}{x-2}$, perché $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$ e $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

Quindi

$\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x+2}{x-2} \overset{\text{algebra delle funzioni continue}}{=} \dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}$

(v) x^3-1 è continua in $\mathbb{R}$ e si annulla per $x=1$

x^2-3x+2 è continua in $\mathbb{R}$ e si annulla per $x=1$

Quindi non possiamo calcolare $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$ utilizzando l'algebra delle funzioni continue. Tuttavia, almeno in un intorno di 1 per ogni $x \neq 1$ $\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-2)}$

Allora $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x+1}{x-2} \underset{\text{algebra limiti}}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to1} x-2} = -3$

(vi) $$\frac{x^x - e^{(x+1)\log x}}{x^2-1} = \frac{e^{x\log x} - e^{x\log x}x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{e^{x\log x}\cancel{(1-x)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = -\frac{e^{x\log x}}{x+1}, \quad \text{per } x>0$$

e $x \neq 1$

Quindi $$\lim_{x\to1}\frac{x^x - e^{(x+1)\log x}}{x^2-1} = \lim_{x\to1} -\frac{e^{x\log x}}{x+1} = \lim_{x\to1} -\frac{x^x}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

algebra dei limiti

(vii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\log x}}{2^x} = +\infty$$

perché $e^{x\log x} > e^x$ per ogni $x > e$

Quindi $\frac{e^{x\log x}}{2^x} > \frac{e^x}{2^x} = \left(\frac{e}{2}\right)^x$ e per il

teorema del confronto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^x = +\infty$$

(viii) $\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}$; $\left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Cerchiamo una successione x_n t.c. $\frac{1}{x_n^2} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$,

allora $x_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}$, si noti che $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e

$$\sin\frac{1}{x_n^2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1$$

Quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x_n^2}}{x_n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = +\infty$

mentre se consideriamo la successione $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$

$\sin\dfrac{1}{y_n^2} = \sin 2n\pi = 0$ da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{y_n^2}}{y_n^2} = \lim_{n\to+\infty} 2n\pi \cdot \sin\frac{1}{y_n} = 0$$

Quindi <u>non esiste</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^2}$

(IX) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Infatti $|\sin x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = 0$$

$\boxtimes$