Esercizio 1

La funzione $t \longmapsto \frac{|t|-1}{|t|^3+1} \in C(\mathbb{R})$, quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \int_0^x \frac{|t|-1}{|t|^3+1}\,dt$ è definita grazie al Teorema fondamentale del calcolo integrale. Per lo stesso Teorema f è anche derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per cui $f \in C^1(\mathbb{R})$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{|x|-1}{|x|^3+1}.$$

Studiamo il segno di f' in $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} |x|-1 > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$ (perché il denominatore è sempre strettamente maggiore di 0)

$\iff \quad x < -1 \ \vee\ x > 1.$

Quindi f è monotona strettamente crescente in $]-\infty,-1]$ e in $[1,+\infty[$, mentre è strettamente decrescente in $[-1,1]$. Quindi in -1 si realizza un punto di massimo relativo e in 1 si realizza un punto di minimo relativo.

L'insieme dei punti in cui f è derivabile due volte è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, perché f' è quoziente di due funzioni rispettivamente derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x)\,(|x|^3+1) - 3|x|^2\,\mathrm{sgn}(x)\,(|x|-1)}{(|x|^3+1)^2}$$

Studiamo il segno di f'' in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\begin{cases} f''>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)\left(|x|^3+1-3|x|^3+3x^2\right)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

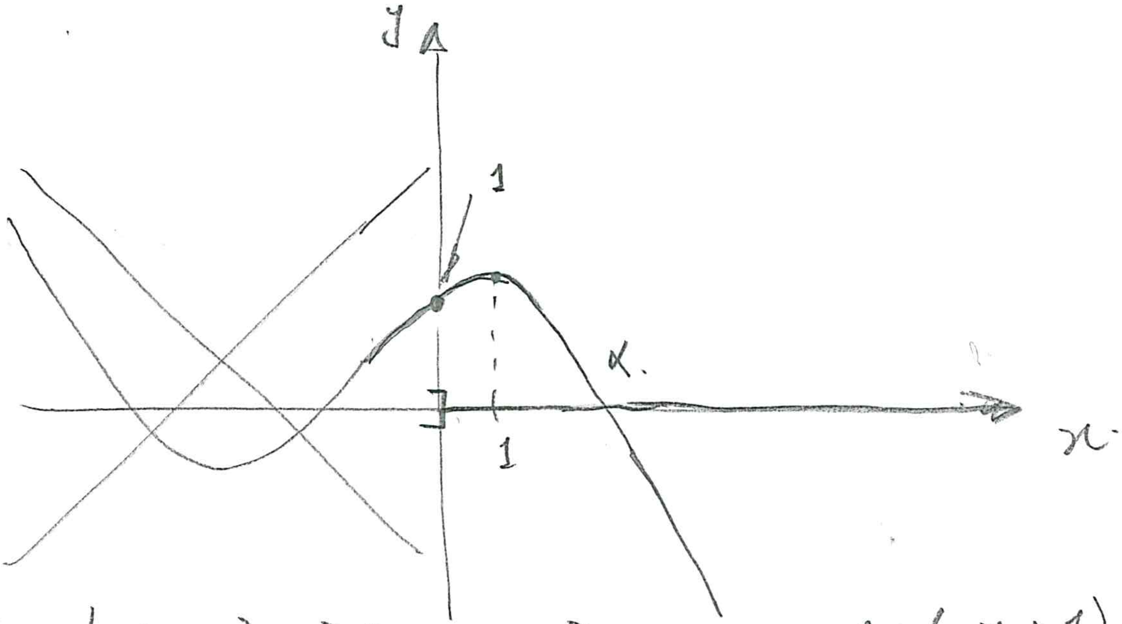
$$\begin{cases} x^3+1-3x^3+3x^2>0 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} -\left(-x^3+1+3x^3+3x^2\right)>0 \\ x<0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2x^3+3x^2+1>0 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2x^3-3x^2-1>0 \\ x<0 \end{cases}$$

I $\qquad\qquad$ II

Siccome è richiesto uno studio qualitativo del segno di f'' studiamo $-2x^3+3x^2+1$ in $]0,+\infty[$ e $-2x^3-3x^2-1$ in $]-\infty,0[$. Allora

I

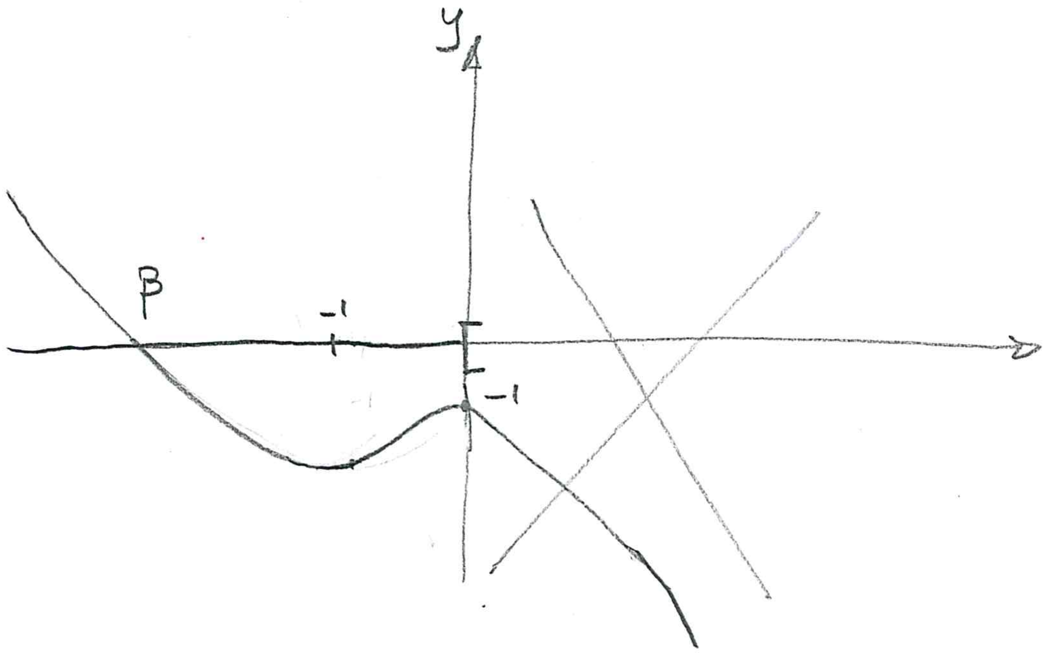


perché $\frac{d}{dx}\left(-2x^3+3x^2+1\right)=-6x^2+6x = 6x(-x+1)>0 \Leftrightarrow$

$x\in\,]0,1[$

Analogamente

II



perché $\frac{d}{dx}(-2x^3-3x^2-1) = -6x^2-6x = -6x(x+1) > 0 \iff x \in]0,-1[$

Quindi f è convessa in $]-\infty, \beta]$ e in $[0, \alpha]$

mentre sarà concava in $[\beta, 0]$ e in $[\alpha, +\infty[$.

Inoltre β, 0, α sono punti di flesso.

Infatti in 0 f è derivabile.

Per quanto riguarda gli asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{|t|-1}{|t|^3+1}\,dt \quad e, \text{ perché } \quad \frac{|t|-1}{|t|^3+1}\sim\frac{t}{t^3}\sim\frac{1}{t^2}$$

per $t\to+\infty$. Quindi l'integrale gen. è convergente per il crit. del cfr.

asintoto orizzontale per $x\to+\infty$

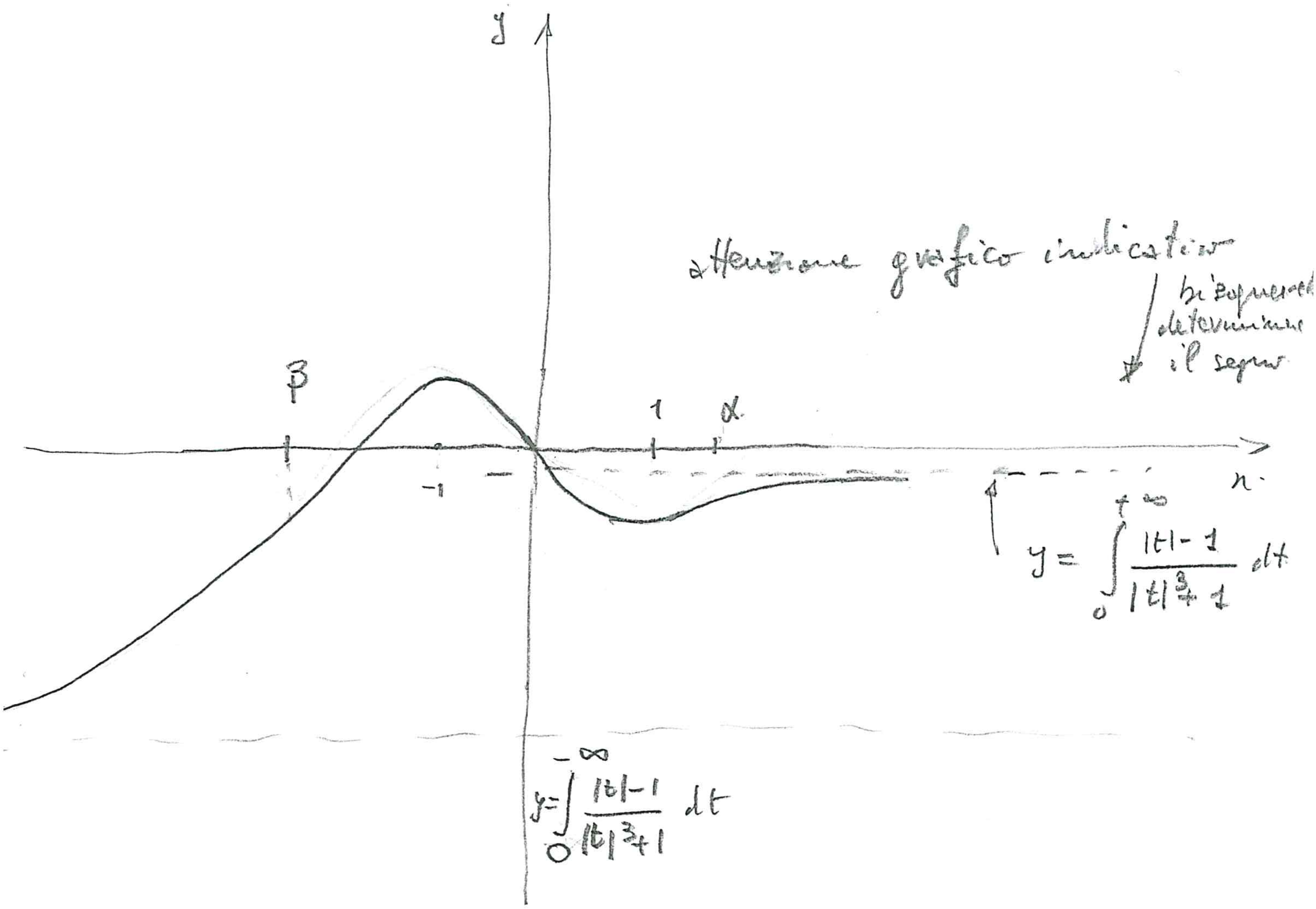
Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\int_0^{-\infty}\frac{|t|-1}{|t|^3+1}\,dt\in\mathbb{R}, \quad \text{perché} \quad \frac{|t|-1}{|t|^3+1}\sim\frac{-t}{-t^3}\sim\frac{1}{t^2}$$

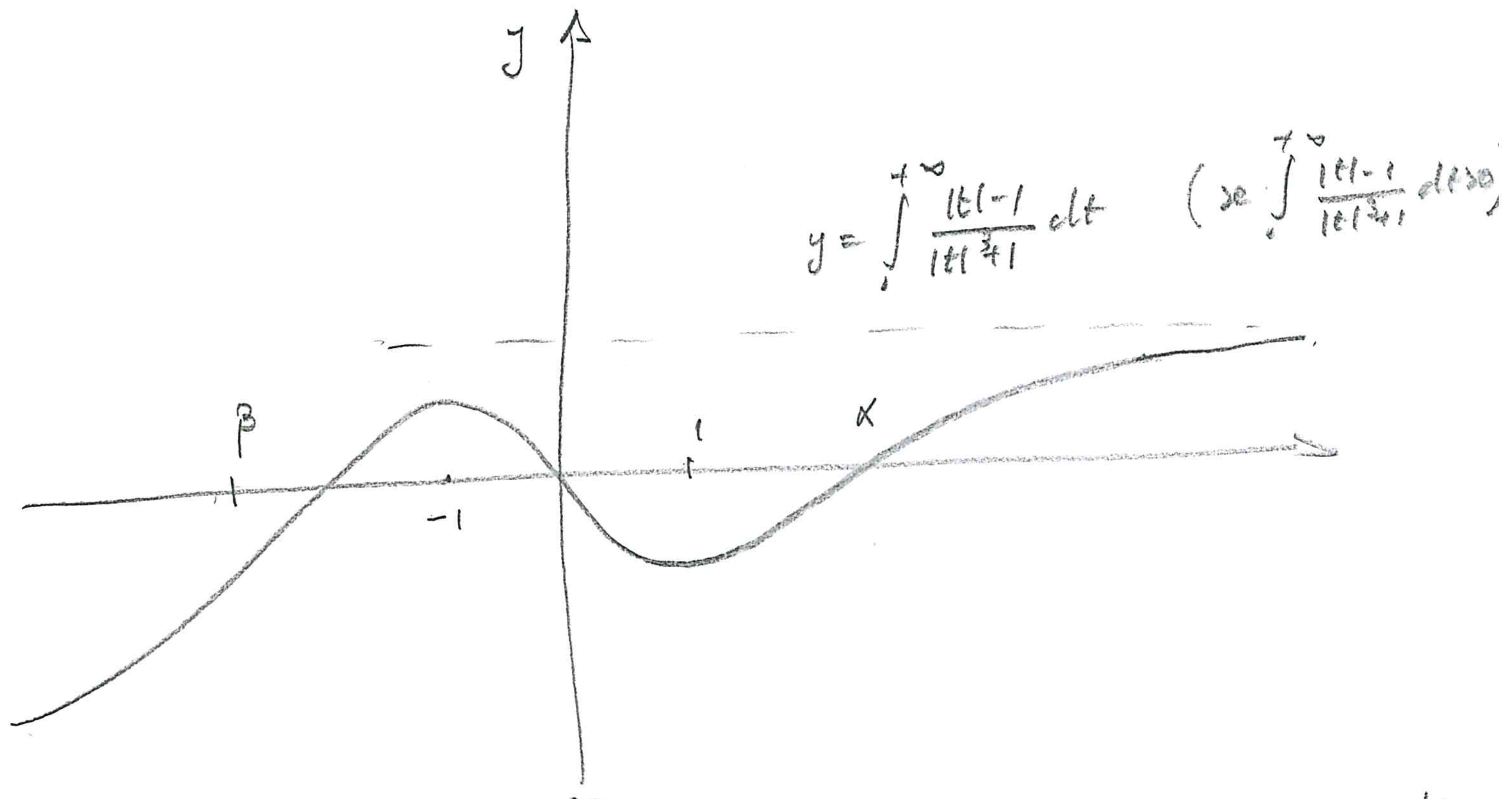
per $t\to-\infty$

Quindi l'integrale gen. è convergente per il crit. del cfr.

Riassumendo



Infatti se $\int_0^{+\infty} \frac{|t|-1}{|t|^3+1}\,dt > 0$, allora il grafico è



Stesso discorso per $y = \int_0^{-\infty} \frac{|t|-1}{|t|^3+1}\,dt$. Entrambe altre varianti.

Quindi per rispondere alla domanda $f(x)=0$ occorrerebbe determinare il segno di $\int_0^{+\infty} \frac{|t|-1}{|t|^3+1}\,dt$ e $\int_0^{-\infty} \frac{|t|-1}{|t|^3+1}\,dt$

Sicuramente c'è sempre una soluzione perché $f(0)=0$. Mentre al più sono 3.

Es. 2.

Calcolare
$$I = \int_0^2 \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\cos(t)+2}\,dt \quad ; \quad \begin{array}{l} s=\cos(t) \\ ds = -\sin(t)\,dt \end{array}$$

$$I = -\int_{\cos(0)=1}^{\cos(2)} \frac{ds}{s^2+s+2} = \int_{\cos(2)}^{1} \frac{1}{s^2+s+2}\,ds = *$$

$$\frac{1}{s^2+s+2} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(s+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]}$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}}\left(s+\frac{1}{2}\right)=z \qquad dz = \frac{2}{\sqrt{7}}\,ds$$

$$* = \frac{4}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\int_{\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\cos(2)+\frac{1}{2}\right)}^{\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{3}{2}} \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\int_{\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\cos(2)+\frac{1}{2}\right)}^{\frac{3}{\sqrt{7}}} \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{2}{\sqrt{7}}\left[\arctan z\right]_{z=\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\cos(2)+\frac{1}{2}\right)}^{z=\frac{3}{\sqrt{7}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\arctan\frac{3}{\sqrt{7}} - \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\cos(2)+\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

Es 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{\alpha}}}{x+x^{2\alpha}}\,dx$

Se $x \to 0$ $\displaystyle\frac{e^{-\frac{x}{\alpha}}}{x+x^{2\alpha}} \sim \frac{1}{x+x^{2\alpha}}$

$$\frac{1}{x+x^{2\alpha}} \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 2\alpha>1 \\[2mm] \dfrac{1}{2x} & \text{se } 2\alpha=1 \\[2mm] \dfrac{1}{x^{2\alpha}} & \text{se } 2\alpha<1 \end{cases}$$

Se $\alpha \geq \frac{1}{2}$ diverge, mentre se $\alpha<\frac{1}{2}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\alpha}}}{x+x^{2\alpha}}\,dx<+\infty$

Se $x \to +\infty$ $\displaystyle\frac{e^{-\frac{x}{\alpha}}}{x+x^{2\alpha}} \leq \frac{e^{-\frac{x}{2\alpha}}}{x+x^{2\alpha}} \cdot e^{-\frac{x}{2\alpha}} \leq c\, e^{-\frac{x}{2\alpha}}$

perché $\displaystyle\frac{e^{-\frac{x}{2\alpha}}}{x+x^{2\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ per ogni $\alpha>0$.

D'altra parte $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2\alpha}} < +\infty$ per ogni $\alpha>0$,

quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{\alpha}}}{x+x^{2\alpha}}\,dx < +\infty \iff \alpha \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right[.$$

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}\,x)}{\cos(x+\pi)\left(\tan^2(2x) - 4x^2\right)}$$

$$N \sim \left(\cancel{1} - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(\cancel{1} - \frac{(\sqrt{2}\,x)^2}{2} + \frac{(\sqrt{2}\,x)^4}{4!} + o(x^4)\right)$$

$$\sim \cancel{-x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{6} \sim \frac{1}{3}x^4, \quad x \to 0$$

$$D \sim \cos(x+\pi)\left(\tan^2(2x) - 4x^2\right) \sim -\left(\tan(2x) - 2x\right)\left(\tan(2x) + 2x\right)$$

$$\sim -\left(\cancel{2x} + \frac{(2x)^3}{3} - \cancel{2x}\right)\left(2x + 2x + o(x)\right)$$

$$\sim -\frac{32}{3}x^4. \quad \text{Allora}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{N}{D} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{32}{3}} = -\frac{1}{32}.$$

Th. Rolle

Sia $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, f derivabile in $]a,b[$.
Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists\, \xi \in\,]a,b[$:

$$f'(\xi) = 0.$$