f è definita su tutto $\mathbb{R}$ perché $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{|t-7|}}{1+|t-7|} \in C(\mathbb{R})$ e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ è ben definita $x \longmapsto -2\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{|t-7|}}{1+|t-7|}\,dt$. Inoltre $x \longmapsto \log(1+|x-7|)$ è definita su $\mathbb{R}$ perché $1+|x-7|>0$.

f è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{7\}$. Infatti $x \longmapsto \log(1+|x-7|)$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{7\}$, perché composizione di $y \longmapsto \log y$ (derivabile in $]0,+\infty[$) e $x \longmapsto 1+|x-7|$ derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{7\}$.

Inoltre $x \longmapsto -2\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{|t-7|}}{1+|t-7|}\,dt$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ in virtù del Teorema fondamentale del calcolo integrale (sull'esistenza delle primitive delle funzioni continue) perché $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{|t-7|}}{1+|t-7|} \in C(\mathbb{R})$.

Si consideri inoltre che f è continua su tutto $\mathbb{R}$.

In particolare per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{7\}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+|x-7|}\operatorname{sgn}(x-7) - 2\frac{\sqrt{|x-7|}}{1+|x-7|} = \frac{\operatorname{sgn}(x-7) - 2\sqrt{|x-7|}}{1+|x-7|}$$

Studiamo il segno di f' in $\mathbb{R}\setminus\{7\}$.

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn}(x-7)-2\sqrt{|x-7|}}{1+|x-7|} > 0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\} \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{sgn}(x-7)-2\sqrt{|x-7|} > 0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-2\sqrt{x-7}>0 \\ x>7 \end{cases} \vee \begin{cases} -1-2\sqrt{7-x}>0 \\ x<7 \end{cases} \iff \begin{cases} 1>2\sqrt{x-7} \\ x>7 \end{cases} \vee \begin{cases} -1>2\sqrt{7-x} \\ x<7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1>4(x-7) \\ x>7 \end{cases} \vee \emptyset \iff \begin{cases} \frac{1}{4}+7>x \\ x>7 \end{cases} \iff x\in\left]7,\frac{29}{4}\right[$$

Pertanto, f è strettamente crescente in $\left[7, \frac{29}{4}\right]$, mentre è strettamente decrescente in $]-\infty, 7]$ e in $\left[\frac{29}{4}, +\infty\right[$.
Inoltre 7 è punto di minimo, mentre $\frac{29}{4}$ è punto di massimo.

La funzione f è derivabile due volte in $\mathbb{R}\setminus\{7\}$ perché quoziente di funzioni derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{7\}$ con denominatore non nullo.

Inoltre

$$f'' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{|x-7|}}\cdot \operatorname{sgn}(x-7)\,(1+|x-7|) - \left(\operatorname{sgn}(x-7) - 2\sqrt{|x-7|}\right)\operatorname{sgn}(x-7)}{(1+|x-7|)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(x-7)}{(1+|x-7|)^2}\left(-\frac{1+|x-7|}{\sqrt{|x-7|}} - \operatorname{sgn}(x-7) + 2\sqrt{|x-7|}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(x-7)}{(1+|x-7|)^2\cdot\sqrt{|x-7|}}\left(-1-|x-7| - \operatorname{sgn}(x-7)\sqrt{|x-7|} + 2|x-7|\right)$$

Studiamo il segno di f'' in $\mathbb{R}\setminus\{7\}$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\}\end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{sgn}(x-7)\left(-1+|x-7| - \operatorname{sgn}(x-7)\sqrt{|x-7|}\right) > 0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\operatorname{sgn}(x-7) + x-7 - \sqrt{|x-7|} > 0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\}\end{cases} \iff \begin{cases} x-7-\operatorname{sgn}(x-7) > \sqrt{|x-7|} \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-7-\operatorname{sgn}(x-7) \geq 0 \\ (x-7-\operatorname{sgn}(x-7))^2 > |x-7| \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\}\end{cases} \iff \underset{\mathrm{I}}{\begin{cases} x-7-1\geq 0 \\ (x-7-1)^2 > x-7 \\ x>7\end{cases}} \vee \underset{\mathrm{II}}{\begin{cases} x-7+1\geq 0 \\ (x-7+1)^2 > 7-x \\ x<7\end{cases}}$$

$$\text{I}\quad \begin{cases} x \geq 8 \\ x^2-16x+64 > x-7 \\ x>7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq 8 \\ x^2-17x+71>0 \\ x>7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ x^2-17x+71>0 \end{cases}$$

$$\Delta = 17^2-284 = 289-284=5, \quad \begin{cases} x\geq 8 \\ x<\frac{17-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{17+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x > \frac{17+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{II}\quad \begin{cases} x\geq 6 \\ x^2-12x+36 > 7-x \\ x<7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+29>0 \\ 6\leq x<7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x<\frac{11-\sqrt{5}}{2} \vee x > \\ 6\leq x<7 \end{cases}$$

$$\Delta = 121-116=5$$

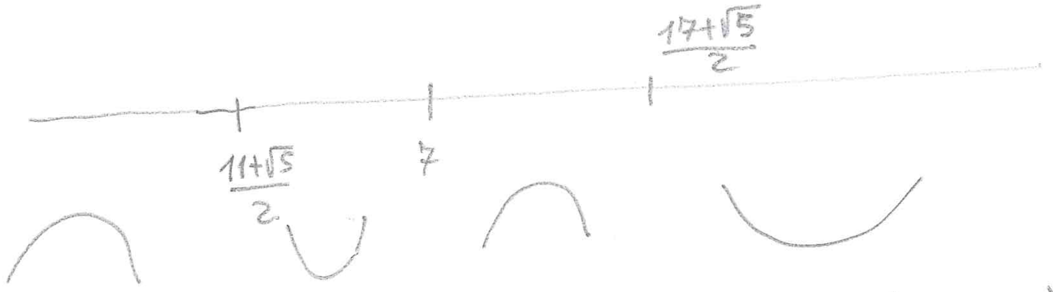
D'altra parte $\frac{11+\sqrt{5}}{2} < 7 \Longleftrightarrow 11+\sqrt{5}<14 \Longleftrightarrow \sqrt{5}<3 \Longleftrightarrow 5<9$

mentre $\frac{11+\sqrt{5}}{2} > \frac{11+2}{2} > 6$. Inoltre $\frac{11-\sqrt{5}}{2} < \frac{11-2}{5} = \frac{9}{5} < 2 < 6$

Pertanto II è soddisfatta se e solo se $x \in \left]\frac{11+\sqrt{5}}{2}, 7\right[$

Quindi f è convessa in $\left[\frac{11+\sqrt{5}}{2}, 7\right]$ e in $\left[\frac{17+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

mentre è concava in $\left]-\infty, \frac{11+\sqrt{5}}{2}\right]$ e in $\left[7, \frac{17+\sqrt{5}}{2}\right]$



$\frac{11+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{17+\sqrt{5}}{2}$ sono punti di flesso, mentre 7 è un punto angoloso.

Non esistono asintoti orizzontali, perché

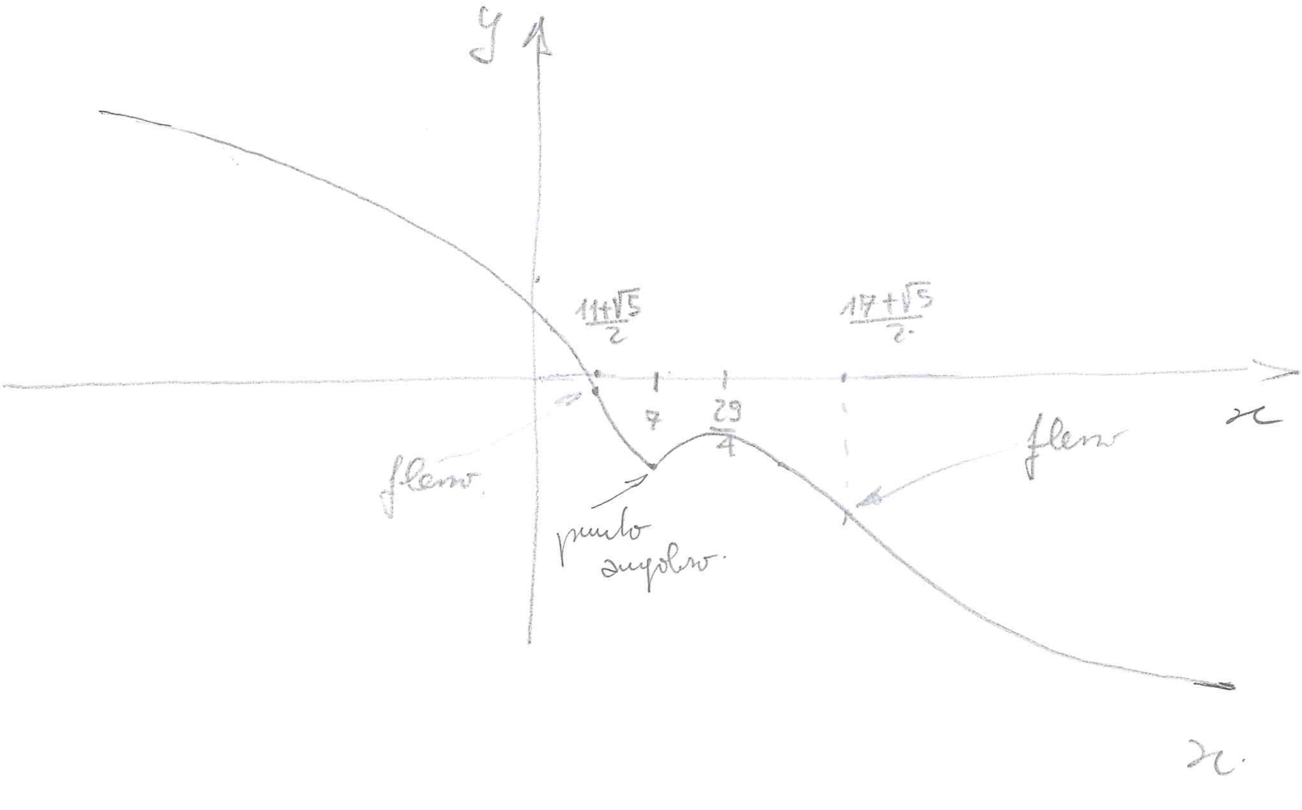
$f(x) \sim \log x - c_1\sqrt{x}$, per $x \to +\infty$ e

$f(x) \sim \log x + c_2\sqrt{x}$, per $x \to -\infty$

con c_1 e c_2 costanti positive.

Quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Grafico



Es. 2

$$\int_0^5 \frac{t-4}{\sqrt{t+5}}\, e^{\sqrt{t+5}}\,dt \quad ; \quad \sqrt{t+5}=s \quad ds=\frac{1}{2\sqrt{t+5}}\,dt \quad ; \quad t+5=s^2$$

$$\int_0^5 \frac{t-4}{\sqrt{t+5}}\, e^{\sqrt{t+5}}\,dt = 2\int_{\sqrt5}^{\sqrt{10}} (s^2-9)e^s\,ds = 2\left[e^s(s^2-9)\right]_{s=\sqrt5}^{s=\sqrt{10}} - 2\int_{\sqrt5}^{\sqrt{10}} 2s e^s\,ds$$

$$= 2e^{\sqrt{10}}(10-9) - 2e^{\sqrt5}(5-9) - \left[4se^s\right]_{s=\sqrt5}^{s=\sqrt{10}} + 4\int_{\sqrt5}^{\sqrt{10}} e^s\,ds$$

$$= 2e^{\sqrt{10}} + 8e^{\sqrt5} - 4\sqrt{10}\,e^{\sqrt{10}} + 4\sqrt5\,e^{\sqrt5} + 4e^{\sqrt{10}} - 4e^{\sqrt5} = (6-4\sqrt{10})e^{\sqrt{10}} + (4+4\sqrt5)e^{\sqrt5}$$

$$= 2(3-2\sqrt{10})e^{\sqrt{10}} + 4(1+\sqrt5)e^{\sqrt5}.$$

Es. 3

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha+10}{x^{10\alpha}+x^{\frac{1}{10}}}\,dx \quad , \quad x \longmapsto \frac{x^\alpha+10}{x^{10\alpha}+x^{1/10}} \in C([0,+\infty[,\mathbb{R})$$

$\forall \alpha>0$. Inoltre $\frac{x^\alpha+10}{x^{10\alpha}+x^{1/10}}>0 \quad \forall x\in[0,+\infty[$.

Quindi $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha+10}{x^{10\alpha}+x^{\frac{1}{10}}}\,ds$ converge se e solo se $\int_0^1 \frac{x^\alpha+10}{x^{10\alpha}+x^{\frac{1}{10}}}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha+10}{x^{10\alpha}+x^{\frac{1}{10}}}\,d$

convergono.

Esaminiamo $\frac{x^\alpha+10}{x^{10\alpha}+x^{1/10}}$ in un intorno di 0.

$$\frac{x^\alpha+10}{x^{10\alpha}+x^{1/10}} \underset{x\to0}{\sim} \frac{10}{x^{10\alpha}+x^{1/10}} \underset{x\to0}{\sim} \begin{cases} \dfrac{10}{x^{10\alpha}}, & \text{se } 10\alpha<\frac{1}{10} \\[2mm] \dfrac{10}{2x^{10\alpha}} & \text{se } 10\alpha=\frac{1}{10} \\[2mm] \dfrac{10}{x^{1/10}} & \text{se } 10\alpha>\frac{1}{10} \end{cases}$$

Quindi $\begin{cases} 10\alpha < 1 \\ 10\alpha < \frac{1}{10} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha < \frac{1}{10} \\ \alpha < \frac{1}{100} \end{cases}$ cioè $\rightarrow \alpha < \frac{1}{100}$;

$$\begin{cases} 10\alpha = \frac{1}{10} \\ 10\alpha < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{100} \\ \alpha < \frac{1}{10} \end{cases} \longrightarrow \alpha = \frac{1}{100}$$; infine

$$\begin{cases} 10\alpha > \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > \frac{1}{100} \\ \frac{1}{10} < 1 \end{cases} \longrightarrow \alpha > \frac{1}{100}.$$

Quindi $\int_0^1 \frac{x^{\alpha}+10}{x^{10\alpha}+x^{1/10}}\,dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > 0.$

Nel caso in cui $\frac{x^{\alpha}+10}{x^{10\alpha}+x^{1/10}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^{\alpha}}{x^{10\alpha}+x^{1/10}} \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{9\alpha}}; & 10\alpha > \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2x^{9\alpha}}; & 10\alpha = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{x^{\frac{1}{10}-\alpha}}; & \frac{1}{10} > 10\alpha \end{cases}$

Cioè $\begin{cases} \alpha > \frac{1}{10} \\ 9\alpha > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > \frac{1}{10} \\ \alpha > \frac{1}{9} \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha > \frac{1}{10}$;

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{10} \\ 9\alpha > 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{10} \\ \alpha > \frac{1}{9} \end{cases} \longrightarrow \phi.$$;

$$\begin{cases} \frac{1}{10} - \alpha > 1 \\ \frac{1}{10} > 10\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{10} > \alpha \\ \alpha < \frac{1}{10} \end{cases} \longrightarrow \alpha < -\frac{9}{10}$$, ma lavoriamo

con $\alpha > 0$ otteniamo che soltanto per $\alpha > \frac{1}{10}$ l'integrale sarà convergente. Pertanto $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}+10}{x^{10\alpha}+x^{\frac{1}{10}}}\,dx$ converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{10}$

Es. 4 Ricordando che $e^{\sqrt{1+x^2}} \sim e$;

$$\cosh(x+4x^2) \sim 1 + \frac{(x+4x^2)^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \quad x \to 0$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \sim 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Quindi

$$N \sim e\left(\cancel{1} + \frac{\cancel{x^2} + \cancel{8x^3} + 16x^4}{2} + \frac{x^4}{24} - \cancel{4x^3} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$$

$$\sim e\left(\left(8 + \frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4\right) \sim \frac{e}{4}x^4, \quad x \to 0$$

Mentre

$$D \sim (\sinh(7x) - \sin 7x)(\sinh(7x) + \sin 7x)$$

$$\sim \left(\cancel{7x} + \frac{(7x)^3}{3!} - \cancel{7x} + \frac{(7x)^3}{3!} + o(x^3)\right)(7x + 7x + o(x))$$

$$\sim \frac{7^3x^3}{3} \cdot 14x \sim 7^4 \cdot \frac{2}{3}x^4, \quad x \to 0$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4}x^4 e}{7^4 \cdot \frac{2}{3}x^4} = \frac{3e}{8 \cdot 7^4}$$

Es. 5

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se $x > -1$ allora

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$