Es. 1

Sia $f(x) = e^{-|x^2-2|} + \int_0^x e^{-|t^2-2|}|t-4|\,dt$.

La relazione f è definita su tutto $\mathbb{R}$ perché $t \mapsto e^{-|t^2-2|}|t-4|$ è continua su $\mathbb{R}$, quindi $x \mapsto \int_0^x e^{-|t^2-2|}|t-4|\,dt$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x^2-2|} + \int_0^x e^{-|t^2-2|}|t-4|\,dt$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, perché $x \mapsto e^{-|x^2-2|}$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ essendo composizione tra $y \mapsto e^{-y}$ (che è derivabile per ogni $y \in \mathbb{R}$) e $x \mapsto |x^2-2|$ (che è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$). Inoltre $x \mapsto \int_0^x e^{-|t^2-2|}|t-4|\,dt$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ grazie al Teorema fondamentale del calcolo integrale sull'esistenza delle primitive delle funzioni continue. Infatti $t \mapsto e^{-|t^2-2|}|t-4|$ è continua su $\mathbb{R}$.

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$$f'(x) = -2x\,\mathrm{sgn}(x^2-2)\,e^{-|x^2-2|} + e^{-|x^2-2|}|x-4| = e^{-|x^2-2|}\left(-2x\,\mathrm{sgn}(x^2-2) + |x-4|\right),$$

Studiamo il segno di f' in $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{cases} \iff \begin{cases} -2x\,\mathrm{sgn}(x^2-2) + |x-4| > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -2x\,\mathrm{sgn}(x^2-2) - x + 4 > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ x \leq 4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -2x\,\mathrm{sgn}(x^2-2) + x - 4 > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ x > 4 \end{cases}$$

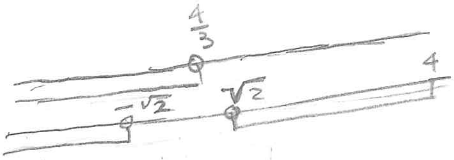
$$\text{I} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{II}$$

/—/

$$\text{I} \iff \begin{cases} -2x - x + 4 > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \\ x \leq 4 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - x + 4 > 0 \\ x^2 - 2 < 0 \\ x \leq 4 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{cases}.$$

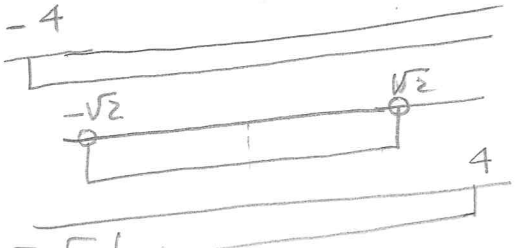
$$\text{I}_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{I}_2$$

$\frac{4}{3} < \sqrt{2}$ infatti $\frac{16}{9} < 2$



$$\text{I}_1 \iff \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ x < -\sqrt{2} \ \vee\ x > -\sqrt{2} \\ x \leq 4 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{cases} \iff \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\end{cases}$$

$\iff x \in S_{I_1} = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[$.



$$\text{I}_2 \iff \begin{cases} x > -4 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x \leq 4 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{cases} \iff \begin{cases} x > -4 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x \leq 4 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{cases}$$

$\iff x \in S_{I_2} = \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

Quindi (I) è soddisfatto se e solo se $x \in S_{I_1} \cup S_{I_2} = \left]-\infty, \sqrt{2}\right[\setminus \{-\sqrt{2}\}$

Analogamente

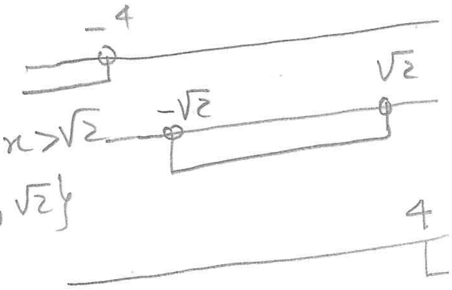
$$\text{II} \iff \begin{cases} -2x\,\mathrm{sgn}(x^2-2) + x - 4 > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ x > 4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x + x - 4 > 0 \\ x^2 - 2 < 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ x > 4 \end{cases} \iff$$

$$\text{II}_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{II}_2$$

$$\iff \begin{cases} -2x+x-4>0 \\ x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2} \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \\ x>4 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x-4>0 \\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \\ x>4 \end{cases}$$

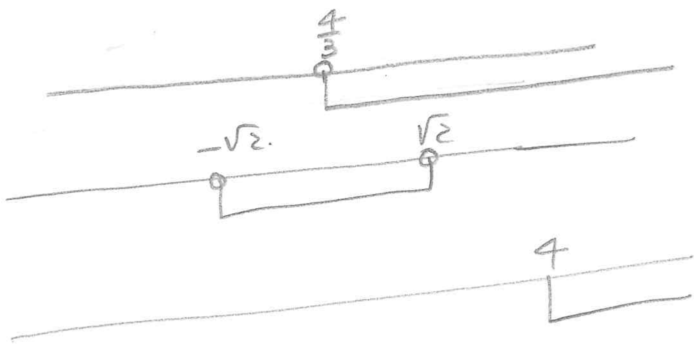
II_1 $\qquad\qquad$ II_2

$$\mathrm{II}_1 \iff \begin{cases} -x-4>0 \\ x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2} \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \\ x>4 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-4 \\ x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2} \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \\ x>4 \end{cases}$$



$$\iff x\in S_{\mathrm{II}_1}=\emptyset$$

$$\mathrm{II}_2 \implies \begin{cases} x>\frac{4}{3} \\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \\ x>4 \end{cases}$$



$$\iff x\in S_{\mathrm{II}_2}=\emptyset$$

Pertanto $\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \end{cases} \iff x\in\,]-\infty,\sqrt{2}[\,\setminus\{-\sqrt{2}\}$.

Quindi f è monotona strettamente crescente in $]-\infty,\sqrt{2}]$ (anche se f non è derivabile in $-\sqrt{2}$), mentre è strettamente decrescente in $[\sqrt{2},+\infty[$

Quindi $\sqrt{2}$ è punto di minimo.

f' è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2},4\}$, quindi f è derivabile due volte in $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2},4\}$ e

$$f''(x) = -2x\,\mathrm{sgn}(x^2-2)\left(-2x\,\mathrm{sgn}(x^2-2)+|x-4|\right)e^{-|x^2-2|} + \left(\mathrm{sgn}(x-4)-2\,\mathrm{sgn}(x^2-2)\right)e^{-|x^2-2|}$$

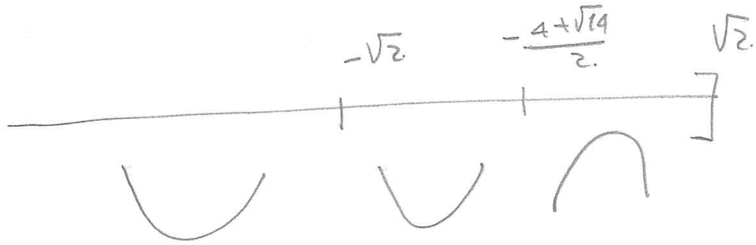
$$= e^{-|x^2-2|}\left(4x^2-2x|x-4|\,\mathrm{sgn}(x^2-2)+\mathrm{sgn}(x-4)-2\,\mathrm{sgn}(x^2-2)\right)$$

Studiamo (come richiesto le conv/concav in $]-\infty,\sqrt{2}]$)

$$\begin{cases} f''>0 \\ x\in\,]-\infty,\sqrt{2}]\setminus\{-\sqrt{2}\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x^2+2x(x-4)-1-2>0 \\ x\in\,]-\infty,-\sqrt{2}[\end{cases} \vee$$

$$\begin{cases} 4x^2-2x(x-4)-1+2>0 \\ x\in\,]-\sqrt{2},\sqrt{2}] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x^2-8x-3>0 \\ x\in\,]-\infty,-\sqrt{2}[\end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2+8x+1>0 \\ x\in\,]-\sqrt{2},\sqrt{2}] \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x<\frac{4-\sqrt{34}}{6} \vee x>\frac{4+\sqrt{34}}{6} \\ x\in\,]-\infty,-\sqrt{2}[\end{cases} \vee \begin{cases} x<\frac{-4-\sqrt{14}}{2} \vee x>\frac{-4+\sqrt{14}}{2} \\ x\in\,]-\sqrt{2},\sqrt{2}] \end{cases} \Longleftrightarrow\ ]-\infty,-\sqrt{2}[\ \vee\ ]-\frac{4+\sqrt{14}}{2},\sqrt{2}]$$



Quindi $\frac{-4+\sqrt{14}}{2}$ è punto di flesso e f è convessa in $]-\infty,-\sqrt{2}]$ e in $\left[-\sqrt{2},\frac{-4+\sqrt{14}}{2}\right]$, mentre è concava in $\left[\frac{-4+\sqrt{14}}{2},\sqrt{2}\right]$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \int_0^{-\infty} e^{-|t^2-2|}|t-4|\,dt \in \mathbb{R},$$ perché

$e^{-|t^2-2|}|t-4|$ è integrabile in senso generalizzato. Inoltre

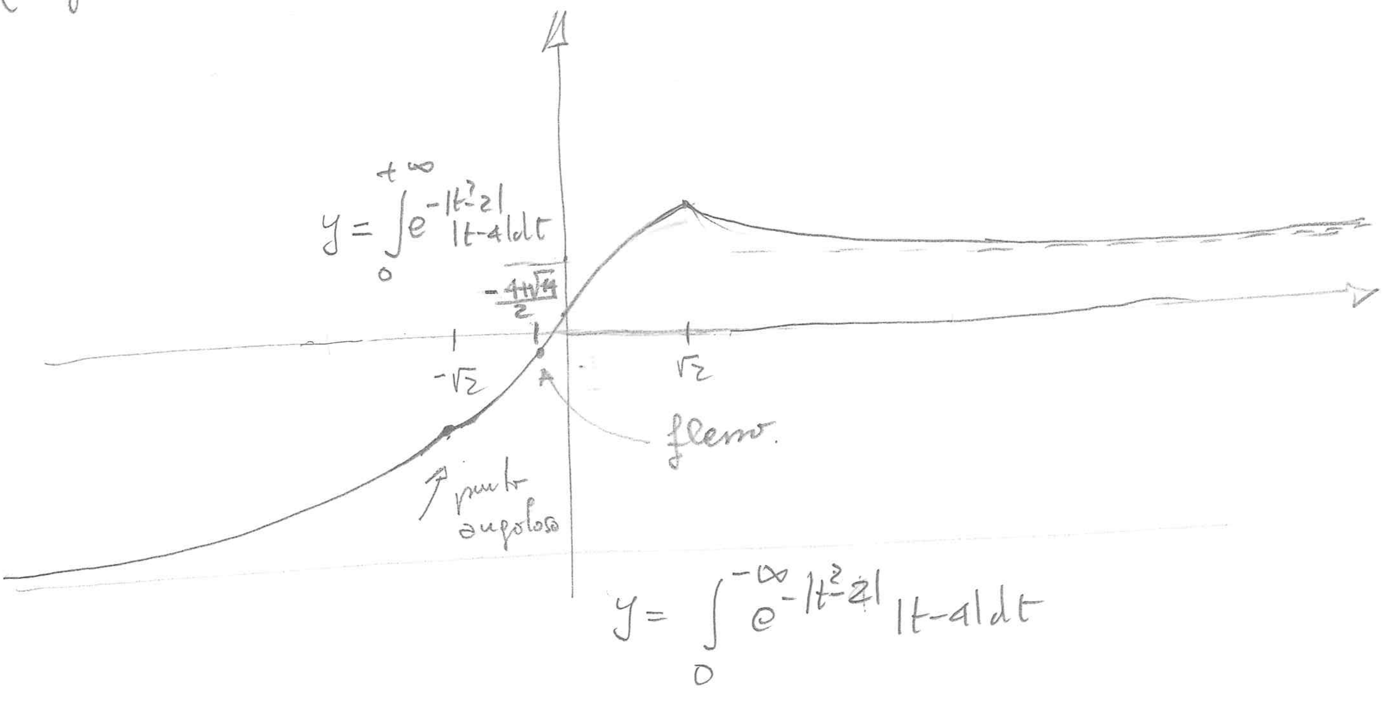
$\int_0^{-\infty} e^{-|t^2-2|}|t-4|\,dt<0$, perché $e^{-|t^2-2|}|t-4|>0$ in $]-\infty,0]$.

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-|t^2-2|}\,|t-4|\,dt \in \mathbb{R}\ ,\ \text{perché}$$

$e^{-|t^2-2|}\,|t-4|$ è integrabile in senso generalizzato

(infatti $e^{-|t^2-2|}|t-4| \le C\, e^{-|t|}$ per $t\to\infty$).



Abbiamo allora due asintoti rispettivamente di equazioni $y=\int_0^{+\infty} e^{-|t^2-2|}|t-4|dt$ e $y=\int_0^{-\infty} e^{-|t^2-2|}|t-4|dt$

Es. 2.

posto $\sin(7x)=t$, $dt = 7\cos(7x)\,dx$ ottenìamo

$$\int_0^{\pi/7} e^{\sin(7x)} \sin(7x)\cos(7x)\,dx = \frac{1}{7}\int_0^{\sin \pi} e^t\, t\, dt = 0$$

Es. 3

$$x \longmapsto \frac{x^\alpha}{x^{3\alpha}+x^{1/3}+\alpha} \in C([0,+\infty[, \mathbb{R}) \text{ per ogni } \alpha>0$$

Quindi è sufficiente studiare il comportamento asintotico per $x \to +\infty$ di $\dfrac{x^\alpha}{x^{3\alpha}+x^{1/3}+\alpha}$.

$$\frac{x^\alpha}{x^{3\alpha}+x^{1/3}+\alpha} \sim \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{x^{3\alpha}}, & \text{se } 3\alpha > \frac{1}{3} \quad \text{I} \\[2ex] \dfrac{x^\alpha}{2x^{1/3}}, & \text{se } 3\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{II} \\[2ex] \dfrac{x^\alpha}{x^{1/3}}, & \text{se } 3\alpha < \frac{1}{3} \quad \text{III} \end{cases}$$

I : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{3\alpha}+x^{1/3}+\alpha}\,dx$ converge se $\begin{cases} 3\alpha > \frac{1}{3} \\ 2\alpha > 1 \\ \alpha>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > \frac{1}{9} \\ \alpha > \frac{1}{2} \\ \alpha>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$

II : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{3\alpha}+x^{1/3}+\alpha}$ converge se $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3}-\alpha > 1 \\ \alpha>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} > \alpha \\ \alpha>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \emptyset$

II : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{3\alpha}+x^{1/3}+\alpha}$ converge se $\begin{cases} \alpha < \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3}-\alpha > 1 \\ \alpha>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha < \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} > \alpha \\ \alpha>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \emptyset$

Pertanto $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{3\alpha}+x^{1/3}+\alpha}\,dx$ converge (per $\alpha>0$) se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 4

$N \sim \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{(5x^2)^2}{2} + o(x^4)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$, per $x \to 0$,

cioè $N \sim \frac{25x^4}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$, per $x \to 0$

$D \sim \sin^2(4x) - 16x^2 \sim (\sin 4x - 4x)(\sin 4x + 4x)$

, per $x \to 0$, quindi $D \sim \left(\cancel{4x} - \frac{(4x)^3}{3!} + o(x^3) \cancel{-4x}\right)(4x + o(x) + ...$

$\sim -\frac{64x^3}{6} \cdot 4x$, per $x \to 0$; cioè $D \sim -\frac{128}{3}x^4$

per $x \to 0$.

Quindi $\lim_{x \to 0} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{25}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{x^4}}{-\frac{128}{3}\cancel{x^4}} = -\frac{25 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3}{128}$

Esercizio 5

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che f è monotona crescente se: per ogni $a_1, a_2 \in A$, se $a_1 < a_2$, allora $f(a_1) \leq f(a_2)$.