Es 1.

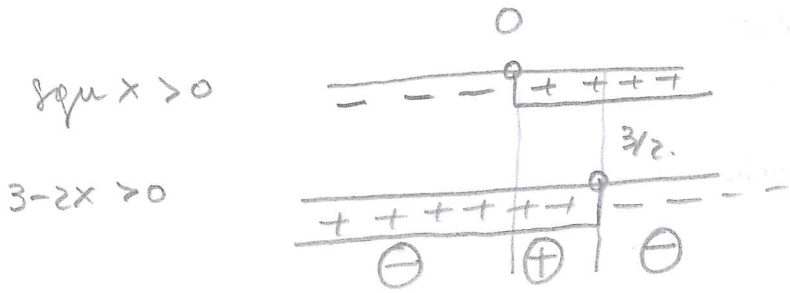
f è definita su tutto $\mathbb{R}$, perché $t \longmapsto \frac{\sqrt{|t|}}{1+|t|} \in C(\mathbb{R})$ e $\arctan\sqrt{|x|}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ perché $\arctan\sqrt{|x|}$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in quanto composizione di $\arctan$ e $\sqrt{|x|}$ rispettivamente deriv. in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

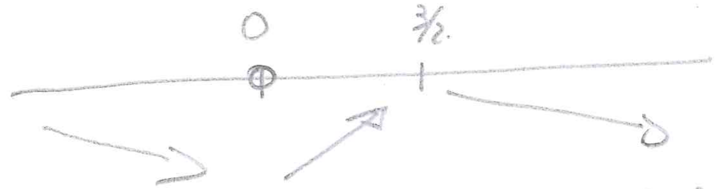
$$f'(x) = \frac{3}{1+|x|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\cdot \operatorname{sgn} x - \frac{\sqrt{|x|}}{1+|x|} = \frac{3\operatorname{sgn} x - 2|x|}{2\sqrt{|x|}\,(1+|x|)}$$

Determiniamo gli intervalli in cui $f' > 0$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\begin{cases} f' > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\operatorname{sgn} x - 2|x| > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn} x\,(3-2x) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$



$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \left]0, \frac{3}{2}\right[\\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left]0, \frac{3}{2}\right[$$

Quindi 

, ovvero

f è monotona strettamente crescente in $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, mentre è monotona strettamente decrescente in $\left]-\infty, 0\right]$ e in $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$. In particolare 0 è punto di minimo, mentre $\frac{3}{2}$ è punto di massimo.

f' è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ perché quoziente di funzioni derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. In particolare f è derivabile due volte in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f''(x) = \frac{-4\sqrt{|x|}\,(1+|x|)\,\mathrm{sgn}\,x - (3\,\mathrm{sgn}\,x - 2|x|)\left(\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{|x|}}\cdot \mathrm{sgn}\,x + 3\sqrt{|x|}\cdot \mathrm{sgn}\,x\right)}{4|x|\,(1+|x|)^2}$$

$$= \frac{-4|x|\,(1+|x|)\,\mathrm{sgn}\,x - (3\,\mathrm{sgn}\,x - 2|x|)(\mathrm{sgn}\,x + 3|x|\cdot \mathrm{sgn}\,x)}{4\,|x|^{3/2}\,(1+|x|)^2}$$

Quindi

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \iff \begin{cases} -4|x|\,(1+|x|)\,\mathrm{sgn}\,x - \mathrm{sgn}\,x\,(3\,\mathrm{sgn}\,x - 2|x|)(1+3|x|) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\mathrm{sgn}\,x\,\left(4|x|\,(1+|x|) + (3\,\mathrm{sgn}\,x - 2|x|)(1+3|x|)\right) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{sgn}\,x\,\left(4|x| + 4x^2 + 3\,\mathrm{sgn}\,x + 9|x|\,\mathrm{sgn}(x) - 2|x| - 6x^2\right) < 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{sgn}\,x\,\left(-2x^2 + |x|\,(2 + 9\,\mathrm{sgn}\,x) + 3\,\mathrm{sgn}\,x\right) < 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + x(2+9) + 3 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -\left(-2x^2 - x(2-9) - 3\right) < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 11x + 3 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

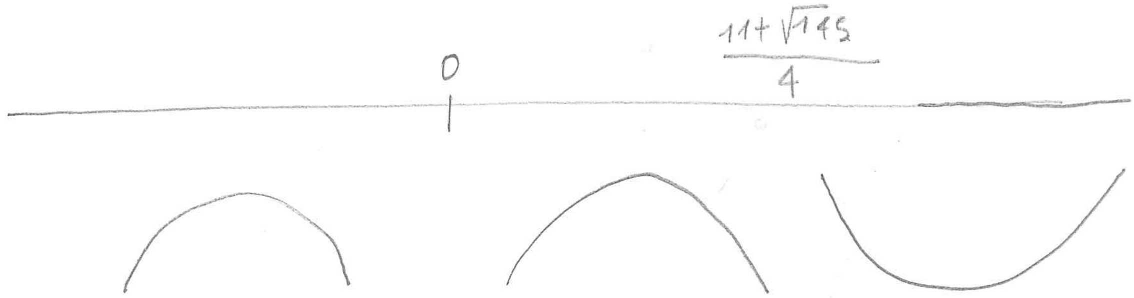
$$\downarrow \qquad \vee \qquad \downarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121+24}}{-4} = \frac{11 \pm \sqrt{145}}{4} \qquad\qquad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x < \frac{11-\sqrt{145}}{4} \vee x > \frac{11+\sqrt{145}}{4} \\ x > 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 3 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\boxed{x > \frac{11+\sqrt{145}}{4}} \qquad\qquad \emptyset$$



Cioè f è convessa in $\left[\frac{11+\sqrt{145}}{4}, +\infty\right[$. Mentre la funzione è concava in $]-\infty, 0[$ e in $\left]0, \frac{11+\sqrt{145}}{4}\right]$.

Quindi $\frac{11+\sqrt{145}}{4}$ è un punto di flesso.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2}\pi - \int_0^{-\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1+|t|}\,dt = +\infty \text{ , perché}$$

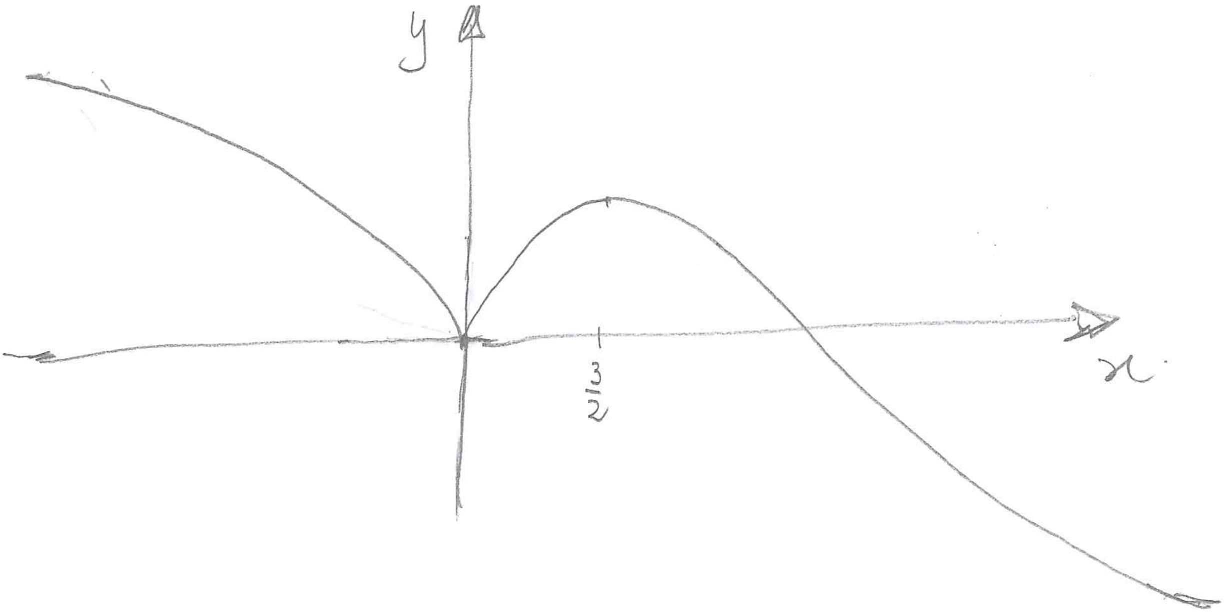
$$-\int_0^{-\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1+|t|}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{|t|}}{1+|t|}\,dt$$ e perché $\frac{\sqrt{|t|}}{1+|t|} \sim \frac{1}{\sqrt{|t|}}$, $t \to -\infty$

l'integrale è divergente positivamente.

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}\pi - \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1+|t|}\,dt = -\infty \text{ , perché}$$

$\frac{\sqrt{|t|}}{1+|t|} \sim \frac{1}{\sqrt{|t|}}$, per $t\to+\infty$, quindi $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1+|t|}\,dt$ è positivamente divergente. Il grafico qualitativo è



Es. 2

$$I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+5\sin(x)+6}\,dx \qquad \text{posto } \sin x = t$$

$$dt = \cos x\,dx$$

$$I=\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5t+6} = \int_0^1 \frac{1}{(t+3)(t+2)}\,dt$$

$$\frac{A}{t+3}+\frac{B}{t+2} = \frac{At+2A+Bt+3B}{(t+3)(t+2)} = \frac{(A+B)t+2A+3B}{(t+3)(t+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+3B=1 \end{cases} \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3-2=1$$

$$A=\frac{\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}{1} = -1 \quad ; \quad B=\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}{1} = 1$$

Quindi $$I = \int_0^1 \frac{-1}{t+3}\,dt + \int_0^1 \frac{1}{t+2}\,dt$$

$$=\Big[-\log|t+3|\Big]_{t=0}^{t=1} + \Big[\log|t+2|\Big]_{t=0}^{t=1} = -\log 4 + \log 3 + \log 3 - \log 2$$

$$= -3\log 2 + 2\log 3$$

Es.3

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}}\,dx$$

$\frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}}$ è positiva in $]0,+\infty[$. Inoltre

$\frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}} \sim \frac{3}{x^{3\alpha}}$ per $x \to 0$ (e $\alpha>0$)

Quindi $\int_0^1 \frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}}\,dx$ converge se e solo se

$$\begin{cases} 3\alpha<1 \\ \alpha>0 \end{cases} \iff 0<\alpha<\frac13 .$$

D'altra parte $\frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}} \sim \frac{x^{1/4}}{x^{4\alpha}}$ per $x \to +\infty$ (e $\alpha>0$)

Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}}\,dx$ converge se e solo se

$$\begin{cases} 4\alpha-\frac14>1 \\ \alpha>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\alpha>\frac54 \\ \alpha>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha>\frac{5}{16} \\ \alpha>0 \end{cases}$$

Pertanto $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac14}+3}{x^{3\alpha}+x^{4\alpha}}\,dx$ converge se e solo se

$$\frac{5}{16}<\alpha<\frac13 .$$

Es. 4

$$N \underset{x\to 0}{\sim} (\cosh(5x^2)-1)\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) \sim \left(1+\frac{(5x^2)^2}{2}+o(x^4)-1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{25}{2}x^4\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D \sim e^{x^2}-1-x^2 \underset{x\to 0}{\sim} \cancel{1}+\cancel{x^2}+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\cancel{-1}\cancel{-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{2}$$

Quindi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{N}{D} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{25}{4}\sqrt{2}\cancel{x^4}}{\frac{\cancel{x^4}}{2}} = 25\frac{\sqrt{2}}{2}$

Es.5 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente

se $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$.

Teorema

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monotona crescente:

(1) Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata allora esiste

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

(2) Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata allora

esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.