$(z^4+(5+i)z^2+5i)(z^4+5-i\sqrt{5})=0 \iff z^4+(5+i)z^2+5i=0 \vee z^4+5-i\sqrt{5}=0;$

$z^4+(5+i)z^2+5i=0 \iff (z^2+5)(z^2+i)=0 \iff z^2=-5 \vee z^2=-i;$

$z=\pm i\sqrt{5} \quad \vee \quad z^2=e^{i\frac{3}{2}\pi} \quad \to z=\pm i\sqrt{5} \quad \vee \quad z_k=e^{\frac{i(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)}{2}}, \quad k=0,1.$

Quindi $z=\pm i\sqrt{5} \quad \vee \quad z=e^{i\frac{3}{4}\pi} \vee z=e^{i\frac{7}{4}\pi} \to z=\pm i\sqrt{5} \vee z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \vee z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Risolviamo anche $z^4+5-i\sqrt{5}=0 \iff z^4=-5+i\sqrt{5} \iff z^4=\sqrt{30}\,e^{i\varphi}$

dove $\varphi=\mathrm{Arg}(-5+i\sqrt{5})=\arctan\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\pi$, cioè $\varphi=-\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\pi$

Allora le soluzioni di $z^4+5-i\sqrt{5}=0$ sono $z_k=(30)^{1/8}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{4}}, \quad k=0,1,2,3.$

#

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{\cos(x)+x^4}{h^2(x)+4}\right)^2}\cdot\frac{(-\sin(x)+4x^3)(h^2(x)+4)-2h(x)h'(x)(\cos(x)+x^4)}{(h^2(x)+4)^2}$$

Quindi $$f'(0)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{h^2(0)+4}\right)^2}\cdot\frac{-2h(0)h'(0)(1)}{(h^2(0)+4)^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}\cdot\frac{-2\cdot 26e^4}{(1+4)^2}$$

$$=\frac{\cancel{25}}{26}\cdot\frac{-52e^4}{\cancel{25}}=-2e^4.$$

#

$y''+5y'=0 \to \lambda^2+5\lambda=0 \to \lambda(\lambda+5)=0 \to \lambda=0, \lambda=-5$

$V_2=\mathrm{span}\{1, e^{-5x}\}$. Cerchiamo "con il metodo per simpatia" una soluzione di $y''+5y'=-5x$ nella forma $\psi_1=x(Ax+B)$. Allora

$\psi_1'=(Ax+B)+Ax \quad ; \quad \psi''=2A$, da cui segue $2A+5(2Ax+B)=-5x$

$$10Ax+2A+5B=-5x \to \begin{cases}10A=-5\\2A+5B=0\end{cases} \iff \begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\-1+5B=0\end{cases} \iff \begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{5}\end{cases}$$

Quindi $\psi_1(x)=x\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\right)$

Analogamente determiniamo una soluzione di $y''+5y'=3e^{-5x}$ nella forma $\varphi_2 = kxe^{-5x}$. Allora $\varphi_2' = ke^{-5x}-5kxe^{-5x}$;

$\varphi_2'' = -5ke^{-5x}-5ke^{-5x}+25kxe^{-5x} = -10ke^{-5x}+25kxe^{-5x}$. Sostituendo otteniamo: $-10ke^{-5x}+25kxe^{-5x}+(ke^{-5x}-5kxe^{-5x})5 = 3e^{-5x} \iff$

$-10ke^{-5x}+\cancel{25kxe^{-5x}}+5ke^{-5x}-\cancel{25kxe^{-5x}} = 3e^{-5x} \iff -5k\cancel{e^{-5x}} = 3\cancel{e^{-5x}}$

$k=-\frac{3}{5}$. Quindi $\varphi_2 = -\frac{3}{5}xe^{-5x}$. Allora l'integrale generale di $y''+5y' = -5x+3e^{-5x}$ è $LV_2 = V_2 + x\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{5}xe^{-5x}$.

Risolviamo il problema di Cauchy: sappiamo che $\eta \in LV_2$,

$\eta(x) = c_1 + c_2e^{-5x} + x\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\right) - \frac{3}{5}xe^{-5x}$; allora

$\eta(0) = c_1+c_2$, $\eta'(x) = -5c_2e^{-5x} - \frac{1}{2}x+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}e^{-5x}+3xe^{-5x}$ e

$\eta'(0) = -5c_2+\frac{1}{5}-\frac{3}{5} = -5c_2-\frac{2}{5}$. Quindi imponiamo

$$\begin{cases} c_1+c_2 = 5 \\ -5c_2-\frac{2}{5} = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 5-\frac{27}{25} = \frac{98}{25} \\ c_2 = -\frac{27}{25} \end{cases}$$

Allora la soluzione cercata è

$$\eta(x) = \frac{98}{25} - \frac{27}{25}e^{-5x} + x\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\right) - \frac{3}{5}xe^{-5x}.$$

f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{7},0\}$ perché composizione di funzioni derivabili rispettivamente in $]0,+\infty[$ e in $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{7},0\}$.

(a) $$f'(x) = \frac{1}{|x^2-7|+|x|}\cdot\left(2x\,\mathrm{sgn}(x^2-7)+\mathrm{sgn}(x)\right)$$

(b) $$\begin{cases} f'(x)>0 \iff 2x\cdot\mathrm{sgn}(x^2-7)+\mathrm{sgn}(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{7},0\} \end{cases}$$ (perché il denominatore è positivo)

Ricordiamo che $x^2-7>0 \iff x<-\sqrt{7} \vee x>\sqrt{7}$, quindi $x^2-7<0 \iff -\sqrt{7}<x<\sqrt{7}$. Analogamente $\mathrm{sgn}(x^2-7)=\begin{cases}1, & x<-\sqrt{7} \vee x>\sqrt{7}\\ -1 & \end{cases}$

e $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$. Allora suddividiamo $\mathbb{R}$ in quattro intervalli $I_1=]-\infty,-\sqrt{7}[$, $I_2=]-\sqrt{7},0[$, $I_3=]0,\sqrt{7}[$, $I_4=]\sqrt{7},+\infty[$.

I $\begin{cases} f'(x)>0\\ x\in I_1\end{cases} \iff \begin{cases} 2x-1>0\\ x\in]-\infty,-\sqrt{7}[\end{cases} \iff \begin{cases} x\in]\frac{1}{2},+\infty[\\ x\in]-\infty,-\sqrt{7}[\end{cases} \iff \emptyset$

II $\begin{cases} -2x-1>0\\ x\in]-\sqrt{7},0[\end{cases} \iff \begin{cases} x<-\frac{1}{2}\\ x\in]-\sqrt{7},0[\end{cases} \iff \begin{cases} x\in]-\infty,-\frac{1}{2}[\\ x\in]-\sqrt{7},0[\end{cases} \iff x\in]-\sqrt{7},-\frac{1}{2}[$

III $\begin{cases} -2x+1>0\\ x\in]0,\sqrt{7}[\end{cases} \iff \begin{cases} x<\frac{1}{2}\\ x\in]0,\sqrt{7}[\end{cases} \iff \begin{cases} x\in]-\infty,\frac{1}{2}[\\ x\in]0,\sqrt{7}[\end{cases} \iff x\in]0,\frac{1}{2}[$

IV $\begin{cases} 2x+1>0\\ x\in]\sqrt{7},+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x>-\frac{1}{2}\\ x\in]\sqrt{7},+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x\in]-\frac{1}{2},+\infty[\\ x\in]\sqrt{7},+\infty[\end{cases} \iff x\in]\sqrt{7},+\infty[$

Quindi $\begin{cases} f'(x)>0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{7},0\}\end{cases} \iff x\in]-\sqrt{7},-\frac{1}{2}[\cup]0,\frac{1}{2}[\cup]\sqrt{7},+\infty[$.

\# Teorema di Fermat.

Sia $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in A\cap D(A)$ e f derivabile in x_0. Se x_0 è punto estremante per f e esiste $\varepsilon>0$ t.c. $]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[\subset A$, allora $f'(x_0)=0$