$$\#1 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{9n^{4000} - 4\cdot 9^{n} + 9^{n-2}}{\dfrac{n^{19}+1}{4000n^{9}+9} + 9^{\frac{n}{2}} + 9^{n-3}} = -2907$$

Infatti

$$\frac{9n^{4000} - 4\cdot 9^{n} + 9^{n-2}}{\dfrac{n^{19}+1}{4000n^{9}+9} + 9^{\frac{n}{2}} + 9^{n-3}} \sim \frac{-4\cdot 9^{n} + 9^{n-2}}{9^{n-3}} \sim 9^{3}\left(-4 + \frac{1}{9^{2}}\right)$$

$$\#2 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+3)\left(\sqrt{4+\sin^{2}(5x)} - \sqrt{4+\sin(5x)}\right)}{\sqrt{5+\cos(3x)\sin^{2}(5x)} - \sqrt{\cos(3x)\sin(5x)+5}} = \sin(3)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Infatti

$$\frac{\sqrt{4+\sin^{2}(5x)} - \sqrt{4+\sin(5x)}}{\sqrt{5+\cos(3x)\sin^{2}(5x)} - \sqrt{\cos(3x)\sin(5x)+5}} = \frac{\cancel{4}+\sin^{2}(5x) - \cancel{4} - \sin(5x)}{\left(\sqrt{5+\cos(3x)\sin^{2}(5x)} - \sqrt{\cos(3x)\sin(5x)+5}\right)\left(\sqrt{4+\sin^{2}(5x)} + \sqrt{4\ldots}\right.}$$

$$= \frac{\sin(5x)\left(\sin(5x)-1\right)\left(\sqrt{5+\cos(3x)\sin^{2}(5x)} + \sqrt{\cos(3x)\sin(5x)+5}\right)}{\left(\cancel{5}+\cos(3x)\sin^{2}5x - \cos(3x)\sin(5x) - \cancel{5}\right)\left(\sqrt{4+\sin^{2}(5x)} + \sqrt{4+\sin(5x)}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\sin(5x)}\,\cancel{\left(\sin(5x)-1\right)}\left(\sqrt{5+\cos(3x)\sin^{2}(5x)} + \sqrt{\cos(3x)\sin(5x)+5}\right)}{\cos(3x)\,\cancel{\sin 5x}\,\cancel{\left(\sin(5x)-1\right)}\left(\sqrt{4+\sin^{2}(5x)} + \sqrt{4+\sin(5x)}\right)}.$$

$$\#3 \qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} (x-8)^{9}\sin\left(\sin\dfrac{1}{(x-8)}\right), & x \neq 8 \\ 0, & x = 8 \end{cases}$$

$f'(8)$ e $f'\left(8+\frac{1}{k\pi}\right)$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$?

Se $x\neq 8$ allora

$$f'(x) = 9(x-8)^{8}\sin\left(\sin\frac{1}{x-8}\right) + (x-8)^{9}\cos\left(\sin\frac{1}{(x-8)}\right)\cos\left(\frac{1}{x-8}\right)\left(-\frac{1}{(x-8)^{2}}\right).$$

Quindi $f'\left(8+\frac{1}{k\pi}\right) = 9\,\frac{1}{(k\pi)^{8}}\cdot\sin(\sin(k\pi)) + \frac{1}{(k\pi)^{9}}\cos(\sin(k\pi))\cos(k\pi)\left(-\frac{1}{(k\pi)^{2}}\right)$

$$= 9\,\frac{1}{(k\pi)^{8}}\cdot\sin(0) + \frac{1}{(k\pi)^{9}}\cos(0)\cos(k\pi)\left(-\frac{1}{(k\pi)^{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{(k\pi)^{7}}\cos(0)\cos(k\pi)$$

$(k\pi)^4 \quad (k\pi)^4 = \frac{(-1)^{k}}{(k\pi)^7}$

Se $x \neq 8$ scriviamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x)-f(8)}{x-8} = \frac{(x-8)^9 \sin\left(\sin \frac{1}{x-8}\right) - f(8)}{x-8} = \frac{(x-8)^9 \sin\left(\sin \frac{1}{x-8}\right)}{x-8}$$

$$= (x-8)^8 \sin\left(\sin\left(\frac{1}{x-8}\right)\right) \qquad \text{per } x \neq 8$$

Pertanto esiste

$\lim_{x \to 8} \frac{f(x)-f(8)}{x-8} = 0$, perché $(x-8)^8 \to 0$ per $x \to 0$ e $\sin\left(\sin \frac{1}{x-8}\right)$ è limitata.

Quindi $f'(8) = 0$.

#4 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Posto $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(e^{8x})$

e sapendo che $f'(-1) = 3$, $f'(e^8) = 9$, $f'(e^{-8}) = 27$

$\boxed{a}$ $g'(-1) = 72e^{-8}$; $\boxed{b}$ $g'(-1) = 72$; $\boxed{c}$ $g'(-1) = 24e^{-8}$; $\boxed{d}$ $g'(-1) = 216e^{-8}$

Infatti $g'(x) = f'(e^{8x}) \cdot 8e^{8x}$. Quindi $g'(-1) = f'(e^{-8}) \cdot 8 \cdot e^{-8}$

$= 27 \cdot 8 \cdot e^{-8} = 216e^{-8}$

#5 $(z+9)^6 - (2+5i)^2 = 0$

$\left((z+9)^3 - (2+5i)\right)\left((z+9)^3 + (2+5i)\right) = 0 \iff$

$(z+9)^3 - (2+5i) = 0 \quad \vee \quad (z+9)^3 + (2+5i) = 0 \iff$

$(z+9)^3 = 2+5i \quad \vee \quad (z+9)^3 = -2-5i$

$|2+5i| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \qquad \arg(2+5i) = \operatorname{arctg} \frac{5}{2}$

$|-2-5i| = \sqrt{29} \qquad \arg(-2-5i) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{2}\right) + \pi$

Quindi $z_k = 29^{1/6} e^{i\theta_k} - 9$, $\theta_k = \frac{\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + 2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$

$w_k = 29^{1/6} e^{i\varphi_k} - 9$, $\varphi_k = \frac{\operatorname{arctg}\frac{5}{2} + (2k+1)\pi}{3}$, $k = 0,1,2$

... potrebbe essere convenientemente risolta anche calcolando

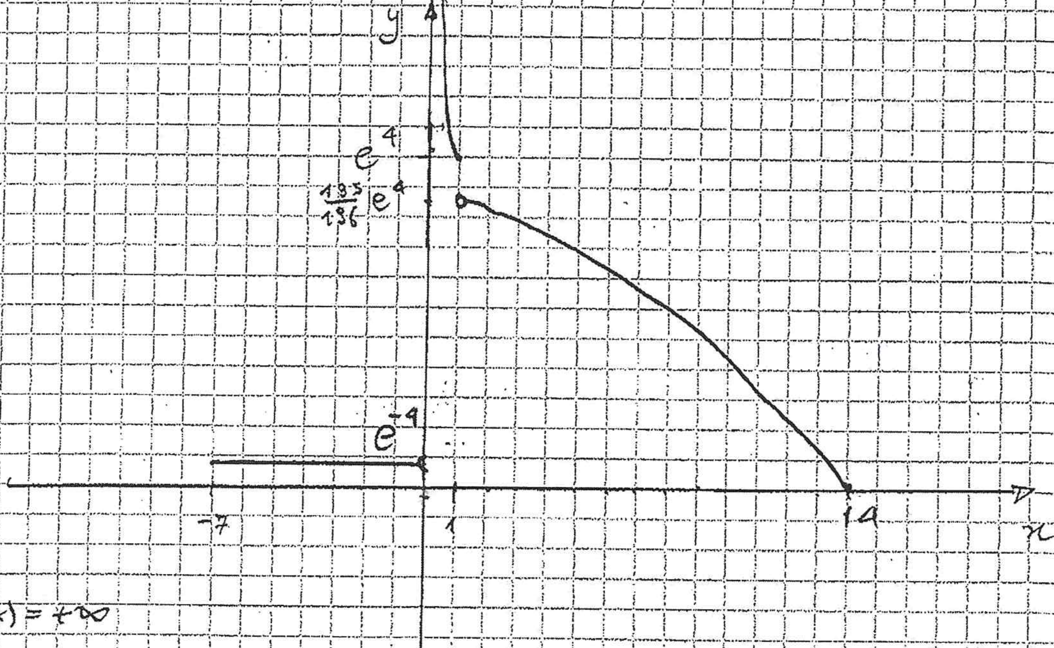
$(2+5i)^2 = 4-25+20i = -21+20i$ e risolvendo l'equazione

$(z+9)^6 = -21+20i$.

#6 $\quad h : [-7,14] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} e^{-4}, & \text{se } x \in [-7,0[\\ e^{4/x}, & \text{se } x \in]0,1] \\ e^4 - \dfrac{e^4 x^2}{196}, & \text{se } x \in]1,14] \end{cases}$

(1) Disegnare il grafico di h;

(2) dimostrare in quali punti h è continua e in quali è discontinua



$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

$h(14) = 0$

$h|_{[-7,0[} = e^{-4}$ è continua in $[-7,0[$ perché è una funzione costante

$h|_{]0,1[} = e^{\frac{4}{x}}$ è continua in $]0,1[$ perché composizione di funzioni continue

$h|_{]1,14]} = e^4 - \dfrac{e^4 x^2}{196}$ è continua in $]1,14]$ perché somma di funzioni continue

Inoltre $\lim_{x \to 1^-} h(x) = e^4 = h(1)$ e $\lim_{x \to 1^+} h(x) = \frac{195}{196} e^4$. Quindi h non è continua in 1, mentre è continua in $[-7,0[\cup]0,1[\cup]1,14]$.

N.B. 0 non appartiene al dominio della funzione.