#1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(7x+4x^3)-49x^2}{x^2\tan(4+\pi x)\left(\cos^2(4x)-\cosh^2(4x)\right)} =$$

$$N \sim \left(\sin(7x+4x^3)-7x\right)\left(\sin(7x+4x^3)+7x\right)$$

$$\sim \left(\cancel{7x}+4x^3-\frac{1}{3!}(7x)^3+o(x^3)-\cancel{7x}\right)\left(7x+o(x^2)+7x\right)$$

$$\sim \left(4-\frac{7^3}{6}\right)x^3\cdot 14x \sim 7\left(\frac{24-343}{3}\right)x^4 \sim -\frac{2233}{3}x^4$$

$$D \sim x^2\tan(4)\left(\cos(4x)-\cosh(4x)\right)\left(\cos(4x)+\cosh(4x)\right)$$

$$\sim x^2\tan(4)\left(\cancel{1}-\frac{(4x)^2}{2}-\cancel{1}-\frac{(4x)^2}{2}+o(x^3)\right)\left(1+o(x)+1+o(x)\right)$$

$$\sim -32x^4\tan(4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{N}{D} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2233}{3}x^4}{-32\tan(4)\cdot x^4} = \frac{2233}{96\tan(4)}$$

#2

$$y''+6y'=3+e^{6x}$$

$$y''+6y'=0 \longrightarrow \lambda^2+6\lambda=0 \longrightarrow \lambda(\lambda+6)=0 \longrightarrow$$

$$\lambda=0 \ \vee\ \lambda=-6 \qquad V_2=\mathrm{span}\{1,e^{-6x}\}$$

$y''+6y'=3$ $\quad\alpha=0$ è sol. di molt. 1. Cerchiamo una sol. nella forma $\psi_1=Kx$

$\psi_1'=K \quad \psi_2''=0$. Quindi sostituendo ottenuamo $6K=3$ e $K=\frac{1}{2}$

Pertanto $\psi_1=\frac{x}{2}$.

$y''+6y'=e^{6x}$. Cerchiamo una sol. nella forma

$$\psi_2=Ke^{6x}$$

Sostituendo $\quad y_2' = 6ke^{6x} \quad y_2'' = 36ke^{6x}$

$$36ke^{6x} + 36ke^{6x} = e^{6x} \longrightarrow 72k = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{72}$$

Quindi $\quad y_2(x) = \frac{1}{72} e^{6x}$

Infine

$$LV_2 = \text{span}\left\{1, e^{6x}\right\} + \frac{x}{2} + \frac{e^{6x}}{72}.$$

#3

$$\int_{-3}^{1} (x+4) \log(x+4)\, dx$$

Per parti:

$$\int_{-3}^{1} (x+4) \log(x+4)\, dx = \left[\frac{(x+4)^2}{2} \log(x+4)\right]_{x=-3}^{x=1} - \int_{-3}^{1} \frac{(x+4)^{\cancel{2}}}{2} \frac{1}{\cancel{x+4}}\, dx$$

$$= \frac{25}{2}\log 5 - \frac{1}{2}\log 1 - \int_{-3}^{1} \frac{x+4}{2}\, dx = \frac{25}{2}\log 5 - \left[\frac{(x+4)^2}{4}\right]_{x=-3}^{x=1}$$

$$= \frac{25}{2}\log 5 - \left(\frac{25}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}\log 5 - 6.$$

#4 (Solo complementi)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^{1/4} + \left(\frac{949}{1000}\right)^n - n^{-6}}{\sqrt{3n} - \sqrt{3n + 4(n+4)^{3/4}}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3n^{1/4} + \left(\frac{949}{1000}\right)^n - n^{-6}}{\sqrt{3n} - \sqrt{3n + 4(n+4)^{3/4}}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3n^{1/4}}{\sqrt{3n} - \sqrt{3n + 4(n+4)^{3/4}}}$$

$$\sim \frac{3n^{1/4}\left(\sqrt{3n} + \sqrt{3n + 4(n+4)^{3/4}}\right)}{\cancel{3n} - \cancel{3n} - 4(n+4)^{3/4}} \sim \frac{3n^{1/4} \cdot 2\sqrt{3}\, n^{1/2}}{-4(n+4)^{3/4}}$$

$$\sim -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{n^{3/4}}{n^{3/4}} \sim -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(~~Solo complessivo~~)

\# $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \sinh^2(3f(x+2))$$

$f(1) = 2$, $f(-1) = 3$, $f'(-1) = 2$, calcolare $g'(-1)$.

$$g'(x) = 2\sinh(3f(x+2)) \cdot \cosh(3f(x+2)) \cdot 3 \cdot f'(x+2)$$

$$g'(-1) = 2\sinh(3f(1)) \cdot \cosh(3f(1)) \cdot 3 \cdot f'(1)$$

$$= 6\sinh(3f(1)) \cdot \cosh(3f(1))\, f'(1)$$

$$= 6\sinh(6)\cosh(6) \cdot 2 = 12\sinh(6)\cosh(6).$$

\# $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}\,dx$. $\alpha > 0$. Studiamo la conv. di

$$\text{I} = \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}\,dx \quad \text{e di} \quad \text{II} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}\,dx .$$

$$\text{I} = -\int_0^1 \frac{x^\alpha - \sin(x^\alpha)}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}\,dx \ ;$$ I conv. se e solo se conv. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha - \sin(x^\alpha)}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}\,dx$. Inoltre $\dfrac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})} > 0$,

quindi per il criterio del confronto asintotico risulta

$$\frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^\alpha - \left(x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{6}\right)}{x^{7\alpha}} \sim \frac{x^{3\alpha}}{6x^{7\alpha}}$$

$\sim \dfrac{1}{6x^{4\alpha}}$. Pertanto I conv. se e solo se $4\alpha < 1 \iff \boxed{\alpha < \frac{1}{4}}$

Studiamo ora la conv. di (II)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha - x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}\,dx$$

$$\frac{\sin x^\alpha - x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}$$ è definitivamente negativo

perché $\sin x^\alpha - x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ (se $\alpha > 0$)

Quindi (II) conv. se e solo se $-\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}$ conv. In tal caso

$$\frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})}$$ è definitivamente positivo.

Inoltre per il criterio del confronto risulta

$$\frac{x^\alpha - \sin x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})} \le \frac{x^\alpha}{x^{7\alpha}(1+x^{28})} = \frac{1}{x^{6\alpha}(1+x^{28})} \le \frac{1}{x^{28}}$$

Pertanto (II) converge (perché $28 > 1$).

\# $f(x) = f(x) = \log\left(|x+4| + \sqrt{|x+\tfrac{13}{4}|}\right)$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Complemento
- (i) Det in quali punti f è derivabile
- (ii) Det gli intervalli in cui f è crescente
- (iii) Disegnare un grafico qualitativo di f (senza tener conto di convessità e concavità)

II° prova +
- (iv) Det gli estremanti locali di f, giustif. tale affermazione
- (V) Det. l'immagine di f, giustificando il risultato ottenuto

Se $x \neq -4$ e $x \neq -\frac{19}{4}$ f è derivabile perché composizione di funzioni derivabili

Pertanto in $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{19}{4}, -4\right\}$ risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{|x+4| + \sqrt{\left|x+\frac{19}{4}\right|}} \left(\operatorname{sgn}(x+4) + \frac{1}{2\sqrt{\left|x+\frac{19}{4}\right|}} \operatorname{sgn}\left(x+\frac{19}{4}\right) \right)$$

Si noti che $f \in C(\mathbb{R})$ perché composizione di funzioni continue e

$\lim_{x \to -\frac{19}{4}} f'(x)$ non esiste , $\lim_{x \to -4} f'(x)$ non esiste

Quindi f è derivabile solo in $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{19}{4}, -4\right\}$.

Studiamo la monotonia.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{19}{4}, -4\right\} \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{sgn}(x+4) + \dfrac{\operatorname{sgn}\left(x+\frac{19}{4}\right)}{2\sqrt{\left|x+\frac{19}{4}\right|}} > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{19}{4}, -4\right\} \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{cases} -1 - \dfrac{1}{2\sqrt{-\frac{19}{4}-x}} > 0 \\ x < -\frac{19}{4} \end{cases}}_{\mathrm{I}} \vee \underbrace{\begin{cases} -1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+\frac{19}{4}}} > 0 \\ -\frac{19}{4} < x < -4 \end{cases}}_{\mathrm{II}}$$

$$\vee \underbrace{\begin{cases} 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+\frac{19}{4}}} > 0 \\ x > -4 \end{cases}}_{\mathrm{III}}$$

$$\mathrm{I} \quad S = \emptyset \quad \vee \quad \mathrm{II} \quad \begin{cases} 1 > 2\sqrt{x+\frac{19}{4}} \\ -\frac{19}{4} < x < -4 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 > 4\left(x+\frac{19}{4}\right) \\ -\frac{19}{4} < x < -4 \end{cases}$$

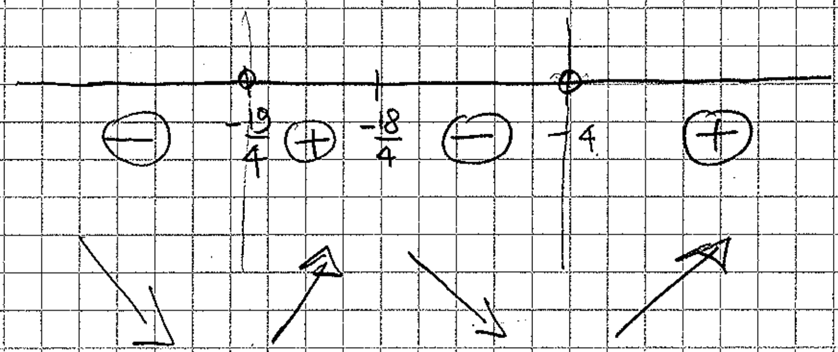
$$\iff \begin{cases} 1 > 4x + 19 \\ -\frac{19}{4} < x < -4 \end{cases} \iff \begin{cases} -18 > 4x \\ -\frac{19}{4} < x < -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -\frac{18}{4} \\ -\frac{19}{4} < x < -4 \end{cases}$$

Quindi (II) è soddisfatto se e solo se $-\frac{19}{4} < x < -\frac{18}{4}$

Infine (III) è sempre soddisfatto, cioè per ogni $x > -4$

Riassumendo

$f' > 0$



f è strettamente crescente in $\left[-\frac{19}{4}, -\frac{18}{4}\right]$ e

in $[-4, +\infty)$

f è strettamente decrescente in $\left(-\infty, -\frac{19}{4}\right]$ e in

$\left[-\frac{18}{4}, -4\right]$.

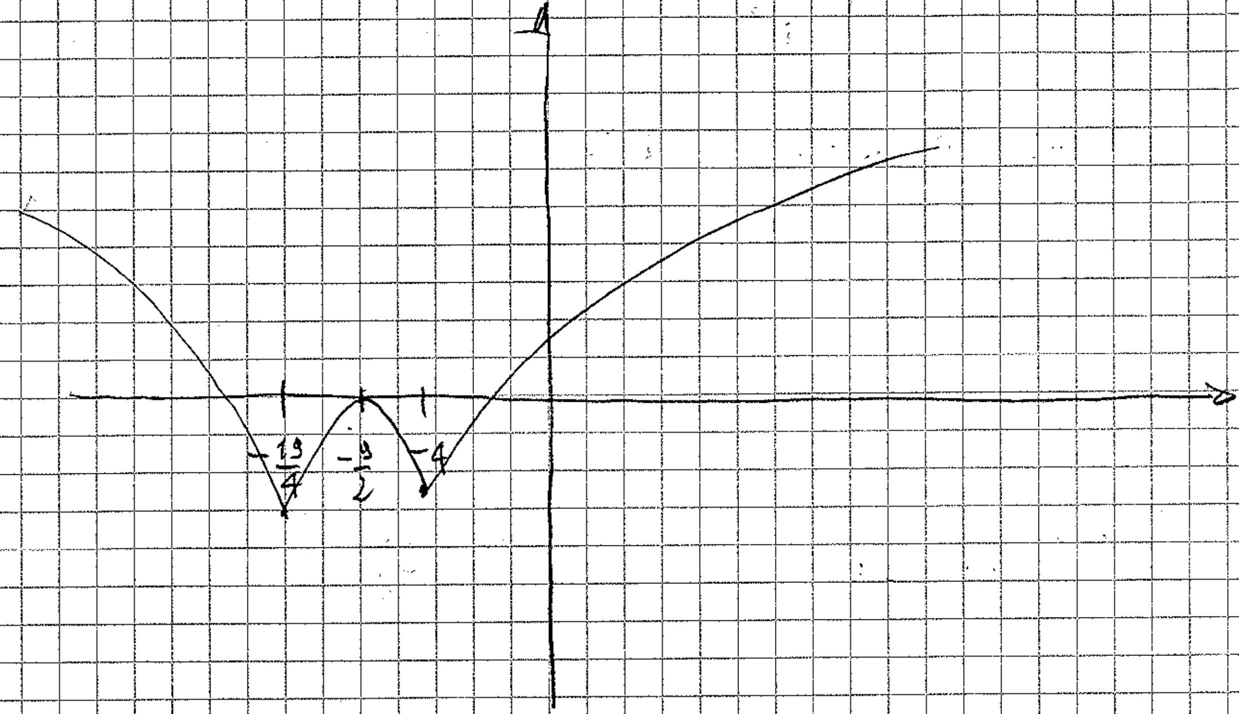
Pertanto in $-\frac{19}{4}$ si realizza un punto di <u>minimo</u>

$f\left(-\frac{19}{4}\right) = \log\frac{3}{4} < 0$

In $-\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$ si realizza un punto di massimo relativo e $f\left(-\frac{9}{2}\right) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \log 1 = 0$

In -4 si realizza un punto di minimo e

$f(-4) = \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Si noti che $f\left(-\frac{19}{4}\right) = \log\left(\frac{3}{4}\right) < f(-4) = \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

perché $\frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{Im} f = \left[\log\frac{3}{4}, +\infty\right)$ perché $f|_{\left(-\infty, -\frac{19}{4}\right]}$ è continua e per il Teorema di Bolzano $f\left(\left(-\infty, -\frac{19}{4}\right]\right)$ è un intervallo.

Inoltre f è monotona strettamente decrescente quindi $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup_{\left(-\infty, -\frac{19}{4}\right]} f$ e

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.\right)$$

Infine $\lim_{x \to -\frac{19}{4}^-} f(x) = \inf_{\left(-\infty, -\frac{19}{4}\right)} f = \log\left(\frac{3}{4}\right)$.

Pertanto $f\left(-\infty, -\frac{19}{4}\right) = \left[\log\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

(solo complessi) #

$$\left(z^4+2-3i\right)\left(z^2-(5+i)z+5i\right)=0$$

$$z^4+2-3i=0 \iff z^4=-2+3i$$

$$z_k=(13)^{1/8}\,e^{i\theta_k} \qquad \theta_k=\frac{-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi+2k\pi}{4}$$

$$k=0,1,2,3$$

$$z^2-(5+i)z+5i=0 \iff (z-5)(z-i)=0$$

$$z=5 \quad e \quad z=i$$

#

(solo II parz)

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{6x^2+25}}\log\left(1+\sqrt{6x^2+25}\right)dx$$

$$t=\sqrt{6x^2+25} \qquad dt=\frac{6x}{\sqrt{6x^2+25}}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_5^{\sqrt{175}}\log(1+t)\,dt=\frac{1}{6}\Big[(1+t)\log(1+t)\Big]_{t=5}^{t=\sqrt{175}}-\frac{1}{6}\int_5^{\sqrt{175}}1\,dt$$

$$\frac{1}{6}\left((1+\sqrt{175})\log(1+\sqrt{175})-6\log 6\right)-\frac{(\sqrt{175}-5)}{6}.$$