SERIE

Studiare la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin\frac{1}{n^\gamma}$$
al variare del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Se $\gamma > 0$ allora per $n \to \infty$
$$\frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin\frac{1}{n^\gamma} \sim n^{2\gamma-3-\gamma}.$$
Quindi la serie converge per $\gamma \in (0, 2)$. D'altra parte se $\gamma < 0$ la serie non è a termini positivi, quindi studiamo la convergenza assoluta. In particolare
$$\mid \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sin\frac{1}{n^\gamma} \mid \leq \frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2}.$$
Per $n \to \infty$
$$\frac{n^{2\gamma}+5}{n^3+2} \sim n^{2\gamma-3},$$
quindi la serie converge per $\gamma < 2$, $\gamma < 0$, cioè per $\gamma < 0$. Rimane il caso $\gamma = 0$; la serie è a termini positivi e il termine $n-$esimo è asintotico a $n^{-3}$. Quindi la serie converge anche per $\gamma = 0$

Risultato:

se $\gamma < 2$ la serie è assolutamente convergente, se $\gamma \geq 2$ la serie diverge positivamente.

INTEGRALE TRIPLO

Dato
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -2 \leq z \leq x^2 + y^2, \ z \leq 3 - 2(x^2 + y^2)\},$$
e sapendo che
$$\int\int\int_B f(x, y, z) dxdydz = \int_{\Pi_{1,2}(B)} (\int_{B_{x,y}} f(x, y, z) dz) dxdy$$
determinare esplicitamente $\Pi_{1,2}(B)$ e $B_{x,y}$.

Svolgimento:

se $3 - 2(x^2 + y^2) \geq -2$, allora $B_{x,y} \neq \emptyset$. Pertanto
$$\Pi_{1,2}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}\}.$$
D'altra parte $B_{x,y} = [-2, \min_{\Pi_{1,2}(B)}\{x^2 + y^2, 3 - 2(x^2 + y^2)\}]$ da cui segue che se $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ allora $B_{x,y} = [-2, x^2 + y^2]$, mentre se $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}\}$, allora $B_{x,y} = [-2, 3 - 2(x^2 + y^2)]$.