ESERCIZI DI ANALISI LB

FAUSTO FERRARI

Serie numeriche, integrali generalizzati, numeri complessi, classificazione di punti estremanti liberi.

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Chimica e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2006/2007.

ESERCIZIO 1

L'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-3x}}{x^\alpha\left(x^2+1\right)}\, dx$$

è convergente se, e solo se, α appartiene all'intervallo

a) $(-\infty, 2)$,

b) $(-1, 2)$,

c) $(-1, +\infty)$,

d) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

ESERCIZIO 2

Siano $g_1, g_2 \in C^{(1)}\left(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)$, e poniamo

$$w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad w(x,y) = g_1\left(x+y^5, g_2(x+y, xy)\right).$$

Calcolare $\nabla w\left(x_0, y_0\right)$, dove $\left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 3

Sia

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, h(x) = \int_1^x \frac{\sin(4t)}{t} dt.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

a) $h'(\pi) = \int_1^\pi \frac{4t\cos(4t)-\sin(4t)}{t^2}\, dt$,

b) $h'(\pi) = 0$,

c) $h'(\pi) = \frac{4}{\pi}$,

d) $h'(\pi) = 1$.

ESERCIZIO 4

Determinare i punti critici della funzione

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y) = x\left(x^2+y^2-9\right)$$

e classificarli.

ESERCIZIO 5

Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{6}{x^\beta}\right)}{1+\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$$

Allora l'integrale è convergente se, e solo se, β appartiene all'intervallo

a) $(1, +\infty)$,

b) $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$,

Date: 13/02/2004.

c) $(0,1)$,
d $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.
ESERCIZIO 6
Posto

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\qquad f(x,y,z)=\cos\left(x+yz^2\right),$$

calcolare $\nabla f\left(\frac{\pi}{3},0,2\right)$.
ESERCIZIO 7
Quale dei seguenti numeri complessi è soluzione dell'equazione

$$e^z=\frac{4-5i}{-5+4i}?$$

a) $\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\right)\right)i+5\pi i$,
b) $\log\left(\frac{4-5i}{-5+4i}\right)$,
c) $\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\right)-\pi$,
d) $\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\right)\right)i+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.
ESERCIZIO 8
Siano $g_1,\ g_2\in C^{(1)}\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$. Posto

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad g(x,y,z)=g_1\left(y\cosh\left(x+z^2\right),g_2\left(y+z,x\right)\right),$$

calcolare $\nabla g(x,y,z)$.
ESERCIZIO 9
Determinare i punti critici della funzione

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad h(x,y)=6x^2y+5x^2+8y^2,$$

e classificarli.
ESERCIZIO 10
Posto

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\qquad f(x,y,z)=\sin\left(x+yz^2\right),$$

calcolare $\nabla f\left(\frac{\pi}{3},0,3\right)$.
ESERCIZIO 11
Sia $\beta\in\mathbb{R}^+$; allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2+5\beta)^n}{7+8^{n+2}}$$

converge se, e solo se, β appartiene all'intervallo:
a) $\left(0,\frac{13}{5}\right)$,
b) $\left(0,\frac{6}{5}\right)$,
c) $(0,8)$,
d) $(0,+\infty)$.
ESERCIZIO 12
Sia $\beta\in\mathbb{R}^+$; allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4+5\beta)^n}{3+8^{n+2}}$$

converge se, e solo se, β appartiene all'intervallo:
a) $(0,+\infty)$,
b) $(0,8)$,
c) $\left(0,\frac{4}{5}\right)$,
d) $\left(0,\frac{7}{5}\right)$.

ESERCIZIO 13 Risolvere l'equazione in $\mathbb{C}$

$$\left(z^3+4+4i\right)\left(z^2-(4-3i)z-12i\right)=0.$$

ESERCIZIO 14

Siano $g_1, g_2 \in C^{(1)}\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$, e poniamo

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad g(x,y)=g_1\left(x^6+\sin y, g_2\left(x+3y, xe^{3y}\right)\right).$$

Calcolare $\nabla g\left(x_0,y_0\right)$, dove $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 15

Determinare i punti critici della funzione

$$k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad k(x,y)=2x^4+5y^4-xy+3$$

e classificarli.

Sia $c\in\mathbb{R}^+$; allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tan\left(\frac{4}{\sqrt[5]{n}}\right)}{n^c+\sqrt{n}}$$

converge se, e solo se, c appartiene all'intervallo:

a) $(0,\frac{1}{2})$,

b) $(1,+\infty)$,

c) $\left(\frac{4}{5},+\infty\right)$,

d) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

ESERCIZIO 16

Determinare, sviluppando i calcoli in dettaglio in un foglio allegato, se l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$$

è convergente.

ESERCIZIO 17

Risolvere l'equazione in $\mathbb{C}$

$$\left(z^4-1-3i\right)\left(z^2-(9-i)z+18-6i\right)=0.$$

ESERCIZIO 19

Siano $v_1, v_2 \in C^{(1)}\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$, e poniamo

$$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad v(x,y)=v_1\left(x^3+v_2(x,y),\sin\left(x^3+y^4\right)\right).$$

Calcolare $\nabla v\left(x_0,y_0\right)$, dove $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 20

Determinare i punti critici della funzione

$$k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad k(x,y)=x^5+32y^5-3xy$$

e classificarli.

ESERCIZIO 21

Sia $\gamma\in\mathbb{R}^+$; allora l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3x}\sinh\left(\frac{2x^3}{x^2+1}\right)}{x^\gamma+x^5}dx$$

:

a) converge se, e solo se, $\gamma\in(0,+\infty)$,

b) converge se, e solo se, $\gamma\in(0,6)$,

c) converge se, e solo se, $\gamma\in(0,4)$,

d) non converge per nessun γ.
ESERCIZIO 22
Sia $\gamma \in \mathbb{R}^+$; allora l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-5x}\log x}{x^\gamma + x^5}\ dx :$$

a) converge se, e solo se, $\gamma \in (0,5)$,
b) converge se, e solo se, $\gamma \in (0,+\infty)$,
c) converge se, e solo se, $\gamma \in (1,+\infty)$,
d) converge se, e solo se, $\gamma \in (0,1)$.
ESERCIZIO 23
Determinare i punti critici della funzione

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad k(x,y) = x^5 + y^5 - (x+y+4)^5$$

e classificarli.
ESERCIZIO 24
Siano $v_1, v_2 \in C^{(1)}\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$, e poniamo

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad v(x,y) = v_1\left(v_2\left(x+y, x^3\right), \cosh\left(x^2+y\right)\right).$$

Calcolare $\nabla v\left(x_0, y_0\right)$, dove $\left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$.
ESERCIZIO 25
Risolvere l'equazione in $\mathbb{C}$

$$\left(z^3 + 4 - 5i\right)\left(z^2 - (4+i)z + 4i\right) = 0$$