

ESERCIZI DI ANALISI LB

FAUSTO FERRARI

Integrale multiplo.

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Chimica e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2006/2007.

ESERCIZIO 1

Calcolare

$$\int_D 2x \, dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, y \leq x + 4\}$.

ESERCIZIO 2

Siano

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + y^2 + z \leq 16, z \geq -9\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Esprimere $\int_B f(x, y, z) \, dx dy dz$ per mezzo di integrali ripetuti in una variabile, senza utilizzare cambiamenti di variabili.

ESERCIZIO 3

Siano

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 25, x^2 + y^2 + z \leq 25, z \geq -9\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Esprimere $\int_B f(x, y, z) \, dx dy dz$ per mezzo di integrali ripetuti in una variabile, senza utilizzare cambiamenti di variabili.

ESERCIZIO 4

Calcolare

$$\int_D 2x \, dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, y \leq x + 3\}$.

ESERCIZIO 5

Calcolare l'integrale

$$\int \int_A \frac{x}{1 + (6x^2 + 6y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx dy,$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25, y \geq x, y \geq 0\}.$$

ESERCIZIO 6

Siano

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{49} + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq -\sqrt{\frac{x^2}{49} + y^2} \right\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$, $B(z) \subset \mathbb{R}^2$, tali che

$$\int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left(\int \int_{B(z)} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz.$$

ESERCIZIO 7

Date: 27/02/2004.

Calcolare, sviluppando i calcoli in dettaglio l'integrale doppio

$$\int \int_K (x^2 + 2y^3) \, dx dy,$$

dove

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1, 3x - y \leq 3 \right\}.$$

ESERCIZIO 8

Siano

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{49} + y^2 + z^2 \leq 36, z \geq -\sqrt{\frac{x^2}{49} + y^2} \right\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$, $B(z) \subset \mathbb{R}^2$, tali che

$$\int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left(\int \int_{B(z)} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz.$$

ESERCIZIO 9

Calcolare l'integrale

$$\int \int_A \frac{x}{1 + (6x^2 + 6y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx dy,$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 49, y \geq x, y \geq 0\}.$$

ESERCIZIO 10

Calcolare, sviluppando i calcoli in dettaglio l'integrale doppio

$$\int \int_K (x^2 + 2y^3) \, dx dy,$$

dove

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{25} \leq 1, 5x - y \leq 5 \right\}.$$

ESERCIZIO 11

Calcolare l'integrale

$$\int \int_A y^3 \, dx dy,$$

dove

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{16} \leq 25, x \geq 0, -5 \leq y \leq 0 \right\}.$$

ESERCIZIO 12

Siano

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 36, 0 \leq z \leq 3 + x^2 + y^2\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ e $K(z) \subset \mathbb{R}^2$, $\forall z \in [a, b]$, tali che

$$\int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left(\int \int_{K(z)} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz.$$

ESERCIZIO 13

Calcolare l'integrale

$$\int \int_A y^3 \, dx dy,$$

dove

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} \leq 9, x \geq 0, -3 \leq y \leq 0 \right\}.$$

ESERCIZIO 14

Siano

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 36, 0 \leq z \leq 5 + x^2 + y^2\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ e $K(z) \subset \mathbb{R}^2$, $\forall z \in [a, b]$, tali che

$$\int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left(\int \int_{K(z)} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz.$$

ESERCIZIO 15

Siano

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{36} + z^2 \leq 9, z \geq \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{36}} \right\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Determinare $K \subset \mathbb{R}^2$ e $g_1, g_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$, $\forall (x, y) \in K$, tali che

$$\int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int_K \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy.$$

ESERCIZIO 16

Calcolare l'integrale

$$\int \int_A (y^2 - 3x) \, dx dy,$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 3, y \geq -3, y \leq |x|\}.$$

ESERCIZIO 17

Siano

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \leq x^2 + y^2 + 1\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Determinare $K \subset \mathbb{R}^2$ e $g_1, g_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$, $\forall (x, y) \in K$, tali che

$$\int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int_K \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy.$$

ESERCIZIO 18

Calcolare l'integrale

$$\int \int_A (x^2 - 2y) \, dx dy,$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, y \leq 3 - |x|\}.$$

ESERCIZIO 19

Siano

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 4, z \leq 2 - \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{9}} \right\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Determinare $K \subset \mathbb{R}^2$ e $g_1, g_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$, $\forall (x, y) \in K$, tali che

$$\int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int_K \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy.$$

ESERCIZIO 20

Calcolare l'integrale

$$\int \int_A (x^2 - 2y) \, dx dy,$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, y \leq 5 - |x|\}.$$

ESERCIZIO 21

Siano

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{25} + z^2 \leq 16, z \leq 4 - \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{25}} \right\}$$

e $f \in C(B; \mathbb{R})$. Determinare $K \subset \mathbb{R}^2$ e $g_1, g_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$, $\forall (x, y) \in K$, tali che

$$\int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int_K \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy.$$