Esercizi di Analisi LB

Fausto Ferrari

Calcolo di integrali multipli: esempio di applicazione del Teorema di riduzione.

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Chimica e Ingegneria per l'Ambiente e le Risorse dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2006/2007.

Calcolare il volume del seguente insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z > x^2 + y^2, \ x + y + z < 1\}.$$

Svolgimento.

$$\mathrm{Vol(A)} = \int_A dxdydz.$$

Poiché il dominio d'integrazione è z-normale consideriamo, in base alla definizione di A,

$$A_{x,y} = \{z \in \mathbb{R} : \ x^2 + y^2 < z < 1 - x - y\}$$

e

$$\Pi_{1,2}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ A_{x,y} \neq \emptyset\}.$$

In particolare

$$\Pi_{1,2}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 < \frac{3}{2}\};$$

infatti, affinché $A_{x,y} \neq \emptyset$, occorre che $x^2+y^2 < 1-x-y$. Da cui segue $x^2+x+y^2+y < 1$, che è l'equazione di una circonferenza di centro $(1/2, 1/2)$ e raggio $\sqrt{3/2}$ (se non si ricorda la formula scrivere la disequazione equivalente alla precedente facendo comparire i quadrati dei binomi $x + \frac{1}{2}$ e $y + \frac{1}{2}$ in modo da ottenere l'equazione della suddetta circonferenza).

Quindi, per il teorema di riduzione, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol(A)} &= \int_A dxdydz = \int_{\Pi_{1,2}(A)} dxdy(\int_{A_{x,y}} dz) \\ &= \int_{\Pi_{1,2}(A)} (1 - x - y - x^2 - y^2)dxdy.\end{aligned}$$

Applichiamo ancora il Teorema di riduzione nel modo seguente.

$$(\Pi_{1,2}(A))_x = \{y \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - (x+\frac{1}{2})^2} < y < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - (x+\frac{1}{2})^2}\}$$

e

$$\Pi_1(\Pi_{1,2}(A)) = [-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}].$$

Infatti affinché $(\Pi_{1,2}(A))_x \neq \emptyset$ è sufficiente che $\frac{3}{2} - (x+\frac{1}{2})^2 \geq 0$. Pertanto

$$\begin{aligned}& \int_{\Pi_{1,2}(A)} (1 - x - y - x^2 - y^2)dxdy \\ = & \int_{\Pi_1(\Pi_{1,2}(A))} dx(\int_{(\Pi_{1,2}(A))_x} (1 - x - y - x^2 - y^2)dy) \\ = & \int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}} dx(\int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}-(x+\frac{1}{2})^2}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}-(x+\frac{1}{2})^2}} (\frac{3}{2} - (x+\frac{1}{2})^2 - (y+\frac{1}{2})^2)dy) \\ = & \int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - 2(x+\frac{1}{2})^2)\sqrt{\frac{3}{2} - (x+\frac{1}{2})^2} - \frac{2}{3}(\frac{3}{2} - (x+\frac{1}{2})^2)^{3/2})dx\end{aligned}$$

(effettuando un cambiamento di variabile, $x + \frac{1}{2} = t$, otteniamo)

$$\begin{aligned}&= \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} ((3 - 2t^2)\sqrt{\frac{3}{2} - t^2} - \frac{2}{3}(\frac{3}{2} - t^2)^{3/2})dt \\ &= \frac{4}{3}\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (\frac{3}{2} - t^2)^{3/2} dt.\end{aligned}$$

Con un ulteriore cambiamento di variabili, $\sqrt{23}t = \sin\theta$, otteniamo

$$\mathrm{Vol(A)} = \frac{4}{3}\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (\frac{3}{2} - t^2)^{3/2} dt = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\theta)d\theta,$$

infine integrando per parti ripetutamente concludiamo

$$\mathrm{Vol(A)} = \frac{9\pi}{8}.$$

Vedremo che il calcolo del volume dell'insieme A sarà semplificato dall'applicazione del Teorema d'integrazione mediante cambiamento di variabili.